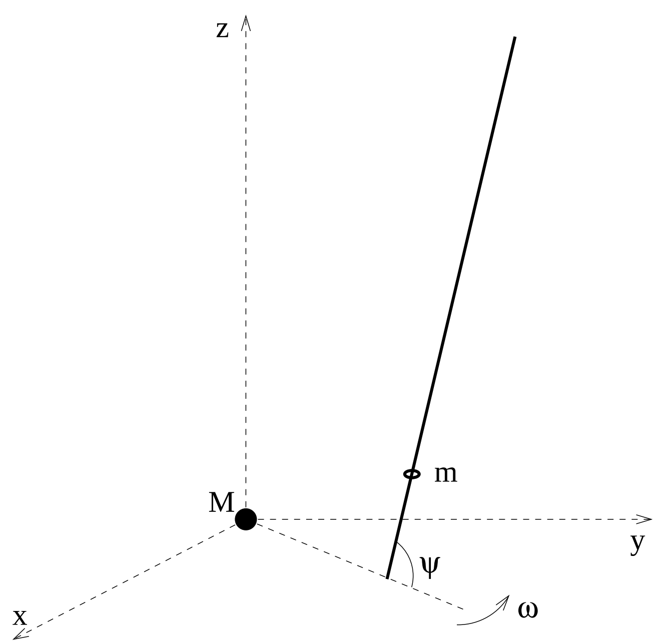
$\boxed{1}$: Δαχτυλίδι μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο σύρμα του σχήματος, στην περιοχή $z \geq 0$. Η εξίσωση του σύρματος σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $z = (\varpi - \varpi_0)\tan\psi$, $\phi = \omega t$, με ϖ_0, ψ, ω σταθερά. (Το σύρμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω, σχηματίζει γωνία ψ με το επίπεδο xy και η τομή του με το επίπεδο xy απέχει απόσταση ϖ_0 από την αρχή των αξόνων.) Στην αρχή των αξόνων υπάρχει μάζα $M = \omega^2\varpi_0^3/G$ που ασκεί βαρυτική δύναμη στο δαχτυλίδι. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $V = -\dfrac{GMm}{\sqrt{\varpi^2 + z^2}}$.
(G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.)



Δείξτε ότι το δαχτυλίδι ισορροπεί στο σημείο $z = 0$.

Για ποιές τιμές της γωνίας ψ η ισορροπία αυτή είναι ασταθής (οπότε το δαχτυλίδι θα αρχίσει να κινείται πάνω στο σύρμα);

$\boxed{2}$: Φορτίο q κινείται σε μαγνητικό πεδίο με διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = B\varpi\hat{z}$, όπου B σταθερά και $(\varpi\,, \phi\,, z)$ οι κυλινδρικές συντεταγμένες. Μελετήστε την κίνηση του φορτίου και συγκεκριμένα:
(α) Βρείτε τρία ολοκληρώματα κίνησης.
(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά δείξτε ότι η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη με
$\dfrac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\rm eff}(\varpi) = E.$
Μελετήστε την συνάρτηση $V_{\rm eff}(\varpi)$ και βρείτε γραφικά τα όρια της ακτινικής κίνησης (δηλ. τα $\varpi_{\min}$ και $\varpi_{\max}$) για τυχούσες αρχικές συνθήκες.

$\boxed{3}$: Φορτίο q κινείται στο ηλεκτρικό πεδίο διπόλου διπολικής ροπής d, το οποίο αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $V = qd\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ (r, θ, ϕ είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες).

(α) Γράψτε την Λαγκρανζιανή $L = L(r\,,\theta\,,\phi\,,\dot{r}\,,\dot{\theta}\,,\dot{\phi})$ και τα ολοκληρώματα ενέργειας E και στροφορμής p_ϕ.
(β) Δείξτε ότι ένα τρίτο ολοκλήρωμα είναι το $\beta = p_\theta^2 + \dfrac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} + 2mqd\cos\theta$ όπου $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$.
Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι να βρείτε την Χαμιλτονιανή $H(r\,,\theta\,,\phi\,,p_r\,,p_\theta\,,p_\phi)$ και να δείξετε ότι $\dot{\beta} = 0$ χρησιμοποιώντας τις κανονικές εξισώσεις. (Αλλιώς, εφαρμόστε τη σχέση $\dot{\beta} = \dfrac{\partial\beta}{\partial t} + [\beta\,, H]$ ή χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Lagrange.)
(γ) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα δείξτε ότι το πρόβλημα αναλύεται σε δυο «μονοδιάστατα» προβλήματα
$E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V_r(r)$, με $V_r(r) = \dfrac{\beta}{2mr^2}$ και
$\beta = m^2r^4\dot{\theta}^2 + V_\theta(\theta)$, με $V_\theta(\theta) = \dfrac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} + 2mqd\cos\theta$
και βρείτε γραφικά τα όρια των r και θ για διάφορες τιμές των E, β και p_ϕ.
(δ) Δείξτε ότι το πρώτο πρόβλημα έχει λύση $r = \sqrt{\dfrac{2E}{m}t^2 + Ct + \dfrac{\beta}{2mE} + \dfrac{mC^2}{8E}}$, όπου $C =$ σταθερά, οπότε το δεύτερο ανάγεται σε $\displaystyle\int^{\cos\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2qd}{m}\xi^3 - \frac{\beta}{m^2}\xi^2 - \frac{2qd}{m}\xi + \frac{\beta - p_\phi^2}{m^2}}} = \pm\int^t \frac{dt}{\frac{2E}{m}t^2 + Ct + \frac{\beta}{2mE} + \frac{mC^2}{8E}}$.