

**1**: Η Hamiltonian ενός συστήματος με γενικευμένες συντεταγμένες  $(q_1, q_2)$  και αντίστοιχες γενικευμένες ορμές  $(p_1, p_2)$  είναι

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 + q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2.$$

(α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός  $Q_1 = q_2 - q_1\sqrt{2}$ ,  $Q_2 = q_2 + q_1\sqrt{2}$ ,  $p_1 = (P_2 - P_1)\sqrt{2}$ ,  $p_2 = P_1 + P_2$  είναι κανονικός και βρείτε την γεννήτρια συνάρτηση  $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t)$ .

(β) Αφού βρείτε την νέα Hamiltonian  $K$ , γράψτε τις κανονικές εξισώσεις και αφού απαλείψετε τα  $P_1, P_2$ , λύστε τις ως προς  $Q_1(t), Q_2(t)$ . Ποια η φυσική σημασία των  $Q_1, Q_2$ ; Σχολιάστε τη μορφή της νέας Hamiltonian  $K$ .

Δίνονται οι τύποι

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

**2**: Σε ένα σύστημα με δύο γενικευμένες συντεταγμένες  $q_1, q_2$  και αντίστοιχες ορμές  $p_1, p_2$ , εκτελούμε μετασχηματισμό

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 \cos \phi + q_2 \sin \phi \\ Q_2 = -q_1 \sin \phi + q_2 \cos \phi \\ p_1 = p_1(q_1, q_2, P_1, P_2) \\ p_2 = p_2(q_1, q_2, P_1, P_2) \end{cases}$$

όπου  $\phi$  σταθερά.

(α) Ποιες οι γενικότερες συναρτήσεις  $p_1(q_1, q_2, P_1, P_2)$  και  $p_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$  για τις οποίες ο μετασχηματισμός είναι κανονικός;

(β) Βρείτε κανονικό μετασχηματισμό ο οποίος μετασχηματίζει την Hamiltonian

$$H = (p_1 - q_1)^2 + p_2^2 + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)^2$$

σε  $K = P_1^2 + P_2^2 + Q_1^2$ .

(γ) Γράψτε και λύστε τις κανονικές εξισώσεις για την Hamiltonian  $K = P_1^2 + P_2^2 + Q_1^2$ .

Δίνονται οι τύποι

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

**3**: Είναι ο μετασχηματισμός

$$\begin{cases} P = f(p) \cosh q \\ Q = f(p) \sinh q \end{cases}$$

κανονικός για οποιαδήποτε συνεχή και διαφορίσιμη συνάρτηση  $f(p)$ ; Αν όχι να προσδιορίσετε εκείνες τις συναρτήσεις  $f(p)$  που κάνουν τον πιο πάνω μετασχηματισμό κανονικό.

**4**: Βρείτε κανονικό μετασχηματισμό που απλοποιεί τη Χαμιλτονιανή  $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ .