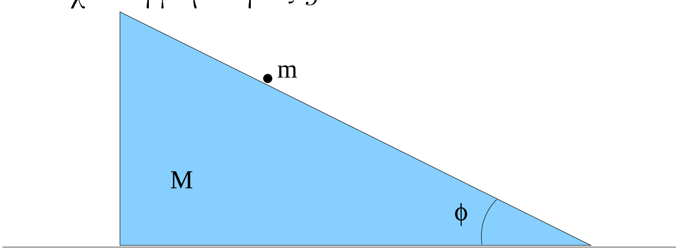
3η εργασία Μηχανικής ΙΙ (2010/2011)

$\boxed{1}$: Ένα σημειακό σωματίδιο μάζας m κινείται χωρίς τριβές πάνω σε μια σφήνα μάζας M. Η σφήνα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Αρχικά (για $t = 0$) και τα δυο σώματα είναι ακίνητα.
(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και λύστε τις.
(β) Βρείτε δυο ολοκληρώματα κίνησης και σχολιάστε τι εκφράζουν.
Γνωστά θεωρούνται τα $m\,, M\,, \phi$ και η (σταθερή) επιτάχυνση βαρύτητας g.



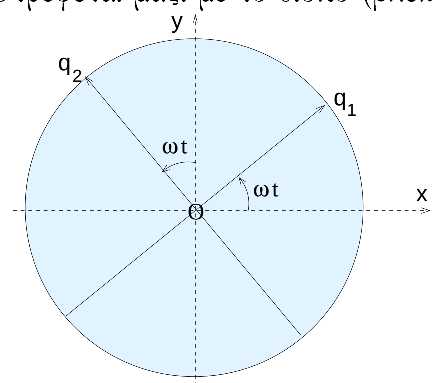
$\boxed{2}$: Μελετήστε την κίνηση σώματος μάζας m που είναι δεμένο σε αβαρή ράβδο μήκους R, το άλλο άκρο της οποίας είναι σταθερό (σφαιρικό εκκρεμές). Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας με σταθερή επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g}$. Βρείτε τις εξισώσεις Lagrange και δύο ολοκληρώματα που μπορούν να τις αντικαταστήσουν. Ποια η φυσική σημασία των ολοκληρωμάτων;

$\boxed{3}$: Ιδανικό εκκρεμές είναι στερεωμένο στην οροφή ενός ανελκυστήρα ο οποίος το χρόνο $t = 0$ αρχίζει να κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Να μελετηθεί η επίπεδη κίνηση του εκκρεμούς (κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο που ορίζουν η θέση και η ταχύτητα του σώματος).
Λύστε την εξίσωση κίνησης στην περίπτωση που $\gamma < g$ και η κίνηση περιορίζεται σε μικρές γωνίες γύρω από την κατακόρυφο.
(Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ και το μήκος του εκκρεμούς ℓ θεωρούνται γνωστά.)

$\boxed{4}$: Μελετήστε την κίνηση ελεύθερου σώματος μέσα στον ανελκυστήρα της προηγούμενης άσκησης.

$\boxed{5}$: Σώμα μοναδιαίας μάζας ($m = 1$) κινείται σε άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από δυναμική ενέργεια $V(x) = -0.2x^5 + 0.5x^2$.
(α) Ποια τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;
(β) Ποια η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από το $x = 0$;

$\boxed{6}$: Οριζόντιος δίσκος ακτίνας ℓ περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Σώμα κινείται πάνω στο δίσκο χωρίς τριβές.
(α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του σώματος χρησιμοποιώντας σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις καρτεσιανές q_1, q_2 του συστήματος Oq_1q_2 που περιστρέφεται μαζί με το δίσκο (βλέπε σχήμα).



Υπόδειξη: Οι σχέσεις που συνδέουν τα $(x,\, y)$ με τα $(q_1,\, q_2)$ μπορούν να βρεθούν από $x = \vec{r}\cdot\hat{x}$, $y = \vec{r}\cdot\hat{y}$, με $\vec{r} = q_1\hat{q}_1 + q_2\hat{q}_2$.
(β) Λύστε τις εξισώσεις αυτές.
Δίνεται η λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 = \omega^2 q_1 + 2\omega\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = \omega^2 q_2 - 2\omega\dot{q}_1 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1 = (C_1 + C_2 t)\cos(\omega t) + (C_3 + C_4 t)\sin(\omega t) \\ q_2 = -(C_1 + C_2 t)\sin(\omega t) + (C_3 + C_4 t)\cos(\omega t) \end{array} \right.$$

(Ένας τρόπος να βρεθεί αυτή η λύση είναι να γράφουμε το σύστημα σαν $\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z = 0$, όπου $z = q_1 + iq_2$.)
(γ) Από τις σχέσεις που συνδέουν τα $(x,\, y)$ με τα $(q_1,\, q_2)$ βρείτε τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$. Τι κίνηση περιγράφουν; Είναι αναμενόμενο το αποτέλεσμα;
(δ) Έστω παρατηρητής στο σημείο O ο οποίος τον χρόνο $t = 0$ πετά σώμα πάνω στο δίσκο με ταχύτητα v_0 προς τη θετική φορά του άξονα q_1 (δηλ. $q_1|_{t=0} = 0$, $q_2|_{t=0} = 0$, $\dot{q}_1|_{t=0} = v_0$, $\dot{q}_2|_{t=0} = 0$). Ποιες οι συναρτήσεις $q_1(t)$, $q_2(t)$ που περιγράφουν την κίνηση όπως την βλέπει ο περιστρεφόμενος αυτός παρατηρητής; Τι σχήμα έχει η τροχιά του σώματος; Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στα όρια του δίσκου;