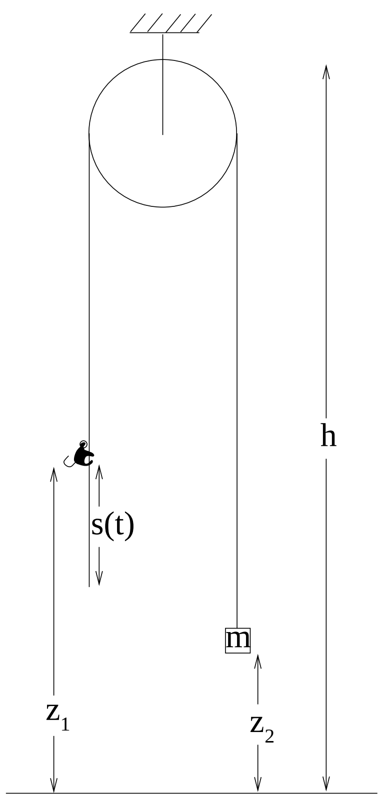
$\boxed{1}$: Ένα σώμα μάζας m κινείται στον τριδιάστατο χώρο υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}$. Έστω διαλέγουμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις κυλινδρικές συντεταγμένες $q_1 = \varpi\,, q_2 = \phi\,, q_3 = z$.
(α) Ποια η έκφραση της ταχύτητας $\vec{v}$; Εκφράστε το αποτέλεσμα σαν συνάρτηση των συντεταγμένων και των μοναδιαίων $\hat{\varpi} = \cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{y}$, $\hat{\phi} = -\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y}$ και $\hat{z}$.
(β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης μέσω των συνιστωσών της δύναμης $\vec{F} = F_\varpi \hat{\varpi} + F_\phi \hat{\phi} + F_z \hat{z}$.

$\boxed{2}$: Σε μια μηχανή Atwood μια από τις μάζες αντικαθιστάται από ένα πίθηκο μάζας M που κινείται πάνω στο σχοινί ώστε το μήκος του σχοινιού που έχει διανύσει σε χρόνο t να είναι μια δοσμένη συνάρτηση $s(t)$, όπως στο σχήμα. Μελετήστε την κίνηση (βρείτε τους βαθμούς ελευθερίας, διαλέξτε γενικευμένες συντεταγμένες, γράψτε την Lagrangian και τις εξισώσεις κίνησης και λύστε τις). Διατηρείται η ενέργεια του συστήματος;



$\boxed{3}$: Σώμα κινείται σε οριζόντια κυκλική στεφάνη ακτίνας R χωρίς τριβές. Ασκείται όμως δύναμη από άνεμο που φυσάει με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_w$. Η δύναμη αυτή υποθέτουμε ότι είναι $\vec{F} = -c\,(\vec{v} - \vec{v}_w)$, όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος και c θετική σταθερά. Δείξτε ότι αν $\phi(t)$ είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος θέσης του σώματος από το κέντρο της στεφάνης ($\vec{r}$) με την ταχύτητα του ανέμου ($\vec{v}_w$), η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{\phi} + \dfrac{c}{m}\dot{\phi} + \dfrac{c v_w}{mR}\sin\phi = 0\,.$

$\boxed{4}$: Δαχτυλίδι κινείται χωρίς τριβές σε σύρμα με εξίσωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες $(\varpi\,, \phi\,, z)$

$$\varpi = z\tan\theta\,, \quad \phi = \frac{z}{z_0 \sin\theta}\,,$$

όπου $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $z_0 > 0$ σταθερές. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο δαχτυλίδι είναι αυτή από το σύρμα.
(α) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης για την $z(t)$ είναι

$$\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)\ddot{z} + \frac{z}{z_0^2}\dot{z}^2 = 0\,.$$

(β) Γράφοντας $\dot{z} \equiv p(z)$ και $\ddot{z} = p\dfrac{dp}{dz}$ δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης συνεπάγεται

$$\frac{dp}{p} + \frac{z dz}{z_0^2 + z^2} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{C_1}{\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_0^2}}}\,,$$

όπου C_1 σταθερά ολοκλήρωσης.
Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του δαχτυλιδιού είναι σταθερή και ίση με $T = \dfrac{mC_1^2}{2\cos^2\theta}$.
(γ) Ολοκληρώνοντας ξανά την εξίσωση πρώτης τάξης ως προς $z(t)$ που προέκυψε δείξτε ότι

$$\frac{z}{z_0}\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} + \ln\left(\frac{z}{z_0} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}\right) = 2\frac{C_1 t}{z_0} + C_2\,,$$

όπου C_2 μια δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης.
Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\xi \sqrt{1 + \xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2}\xi\sqrt{1 + \xi^2} + \ln\sqrt{\xi + \sqrt{1 + \xi^2}}\,.$$

Ποιες οι σταθερές C_1 και C_2 αν αρχικά (για $t = 0$) είναι $z = 0$ και $\dot{z} = v_0$;