Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ Μαθηματικού, 27 Οκτωβρίου 2011
Διάρκεια εξέτασης $2\,\frac{1}{2}$ ώρες, απαντήστε τα 3 από τα 4 θέματα
Καλή επιτυχία

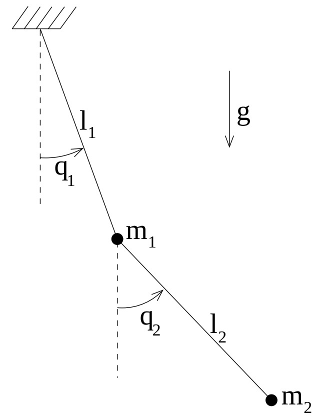
Θέμα $1^{\text{ο}}$:

Σημειακό σώμα μάζας $m = 1$ και φορτίου $q = 1$ κινείται σε χώρο με ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Η Lagrangian του προβλήματος, σε κατάλληλο σύστημα μονάδων όπου $c = 1$, είναι $L = \dfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}\dot{y}^2 + \dfrac{1}{2}\dot{z}^2 + x + x\dot{y}$.

(α) Ποια είναι τα δυναμικά Φ, $\vec{A}$ και ποια τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$;

(β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.

(γ) Λύστε τις εξισώσεις αυτές στην περίπτωση που για $t = 0$ είναι $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = -1$, $\dot{z} = 0$.



Θέμα $2^{\text{ο}}$:

Το διπλό εκκρεμές του σχήματος, με $m_1 = m_2 = m$ και $l_1 = l_2 = l$, βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$.

Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις των μαζών γύρω από τις θέσεις ευσταθούς ισορροπίας τους ($|q_1|, |q_2| \ll 1$). Συγκεκριμένα βρείτε τις φυσικές ιδιοσυχνότητες και τους αντίστοιχους τρόπους ταλάντωσης.

Θέμα $3^{\text{ο}}$:

(α) Αν q_1, q_2 είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες (γωνίες από την θέση ισορροπίας) των μαζών του προηγούμενου σχήματος και p_1, p_2 οι αντίστοιχες ορμές, δείξτε ότι η Hamiltonian του συστήματος για $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ και $|q_1|, |q_2| \ll 1$, είναι

$$H = \frac{1}{ml^2}\left(\frac{1}{2}p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2\right) + mgl\left(q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2\right) .$$

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $Q_1 = q_2 - q_1\sqrt{2}$, $Q_2 = q_2 + q_1\sqrt{2}$, $p_1 = (P_2 - P_1)\sqrt{2}$, $p_2 = P_1 + P_2$ είναι κανονικός και βρείτε την γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t)$.

(γ) Αφού βρείτε την νέα Hamiltonian K, γράψτε τις κανονικές εξισώσεις και αφού απαλείψετε τα P_1, P_2, λύστε τις ως προς $Q_1(t)$, $Q_2(t)$. Ποια η φυσική σημασία των Q_1, Q_2; Σχολιάστε τη μορφή της νέας Hamiltonian K.

Δίνονται οι τύποι $\dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$, $K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$.

Θέμα $4^{\text{ο}}$:

Ένας ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους δημιουργεί ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχούν σε δυναμικά $\Phi = \Phi_0 \ln\dfrac{\varpi_0}{\varpi}$ και $\vec{A} = \Psi_0 \ln\dfrac{\varpi_0}{\varpi}\ \hat{z}$, όπου οι σταθερές Φ_0 και Ψ_0 συνδέονται με την γραμμική πυκνότητα φορτίου του αγωγού ($\Phi_0 > 0$ όταν είναι θετικά φορτισμένος) και το ρεύμα που τον διαρρέει, ενώ η σταθερά ϖ_0 είναι αυθαίρετη. Έτσι, η Lagrangian για ένα φορτίο q που κινείται κοντά στον αγωγό είναι $L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - q\Phi_0 \ln\dfrac{\varpi_0}{\varpi} + \dfrac{\Psi_0}{c}\ \dot{z}\ \ln\dfrac{\varpi_0}{\varpi}$.

Δείξτε ότι λόγω του μαγνητικού πεδίου το φορτίο είναι υποχρεωμένο να κινείται κοντά στον αγωγό (δηλ. η απόσταση ϖ δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη κάποιας μέγιστης $\varpi_{\max}$), ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, ακόμα και στην περίπτωση που το φορτίο είναι ομόσημο με το φορτίο του αγωγού.

Υπόδειξη: Αφού βρείτε την $V_{\text{eff}}(\varpi)$ για μια «μονοδιάστατη» κίνηση στην ϖ κατεύθυνση, δείξτε ότι αυτή απειρίζεται για $\varpi \to \infty$.