



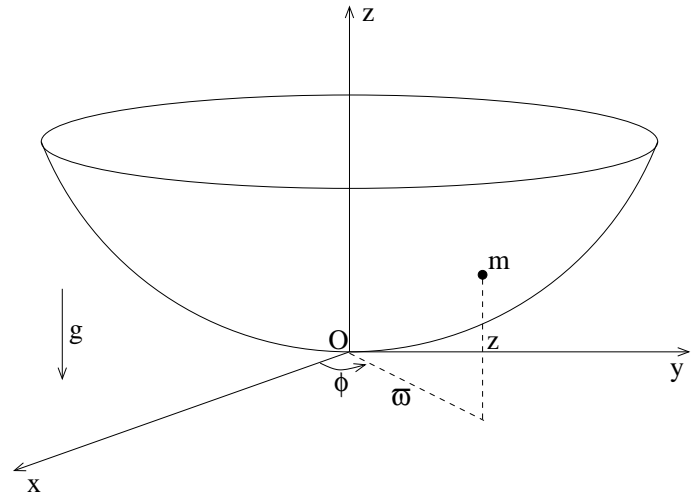
Θέμα 1^ο:

Σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβές πάνω σε επιφάνεια $z = \lambda\omega^2$, όπου λ θετική σταθερά και $z, \omega = \sqrt{x^2 + y^2}$ οι γνωστές κυλινδρικές συντεταγμένες. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας $\vec{g} = -g\hat{z}$, όπως στο δίπλα σχήμα.

(α) Ποιες οι Lagrangian και Hamiltonian του προβλήματος;

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης της μάζας m και δύο ολοκληρώματα κίνησης.

(γ) Αφού δείξετε ότι η κίνηση της μάζας μπορεί να θεωρηθεί «μονοδιάστατη», βρείτε τα όρια της κίνησης που αντιστοιχούν σε δοσμένες τιμές των δύο ολοκληρωμάτων.



Θέμα 2^ο:

Σωματίδιο μάζας m κινείται χωρίς τριβές πάνω σε σύρμα που χαρακτηρίζεται από την εξίσωση $z = f(\omega)$, όπου $z, \omega = \sqrt{x^2 + y^2}$ οι γνωστές κυλινδρικές συντεταγμένες. Το σύρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα z μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g} = -g\hat{z}$. Μπορείτε να υποθέσετε για ευκολία ότι περνάει από την αρχή των αξόνων, $f(0) = 0$.

(α) Ζητείται το σχήμα της καμπύλης ώστε όλα τα σημεία της να είναι σημεία ισορροπίας.

(β) Βρείτε ένα ολοκλήρωμα κίνησης για τυχούσα μορφή της $f(\omega)$. Είναι η ενέργεια της μάζας m σταθερή;

Θέμα 3^ο:

(α) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα που περιγράφεται από την Lagrangian $L = \dot{x}\dot{y} - xy$. Αν αρχικά $x = 0, y = 1, \dot{x} = 1, \dot{y} = 0$, ποιες οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ και ποια η εξίσωση τροχιάς;

(β) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης για ένα σημειακό σώμα μάζας m που κινείται στον τριδιάστατο χώρο, κάτω από την επίδραση του πεδίου δύναμης $V = -\vec{f} \cdot \vec{r}$, όπου \vec{f} σταθερό διάνυσμα και \vec{r} το διάνυσμα θέσης του σώματος από κάποιο σταθερό σημείο.

(γ) Για ποια λ και n είναι κανονικός ο μετασχηματισμός $\{Q = q/p, P = \lambda p^n\}$;

Θέμα 4^ο:

Μελετήστε τις ταλαντώσεις του συστήματος με $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2, V = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2$, γύρω από τη θέση ισορροπίας $x = y = 0$ (βρείτε τις κυκλικές συχνότητες και τη σχέση των x και y για κάθε φυσικό τρόπο ταλάντωσης). Ποια η περίοδος της κίνησης για τυχαίες αρχικές συνθήκες;