Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ Μαθηματικού, 22 Σεπτεμβρίου 2010
Διάρκεια εξέτασης $2\,\frac{1}{2}$ ώρες, απαντήστε τα 3 από τα 4 θέματα
Καλή επιτυχία

Θέμα $1^{\text{ο}}$:

Φορτίο κινείται στο ηλεκτρικό πεδίο διπόλου. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες $(r,\,\theta,\,\phi)$ σε κατάλληλο σύστημα αναφοράς η Λαγκρανζιανή μπορεί να γραφεί σαν $L = \dfrac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\;\dot\phi^2\right) + \lambda\dfrac{\cos\theta}{r^2}$, όπου λ θετική σταθερά.

(α) Γράψτε τα ολοκληρώματα ενέργειας E και στροφορμής p_ϕ, αφού δικαιολογήσετε ότι υπάρχουν.

(β) Δείξτε ότι ένα τρίτο ολοκλήρωμα είναι το $\beta = \left(mr^2\dot\theta\right)^2 + \dfrac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} - 2m\lambda\cos\theta$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\dot\beta = 0$ χρησιμοποιώντας την έκφραση $\dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot\theta\right) = \ldots$ που προκύπτει από τις εξισώσεις Λαγκράνζ.

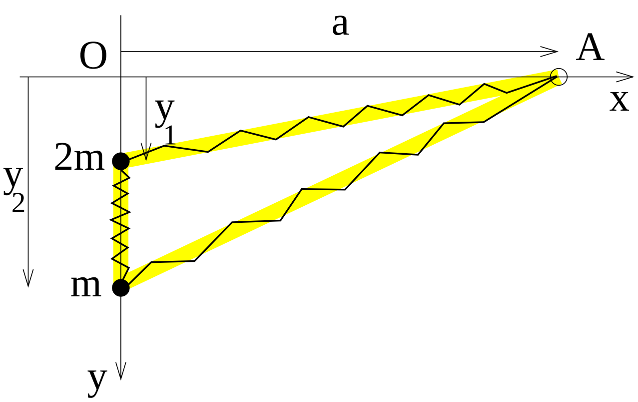
(γ) Συνδυάζοντας τις εκφράσεις των ολοκληρωμάτων δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\frac{m\dot r^2}{2} + \frac{\beta}{2mr^2} = E\,, \qquad m^2r^4\dot\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} - 2m\lambda\cos\theta = \beta\,, \qquad mr^2\sin^2\theta\;\dot\phi = p_\phi\,.$$

(δ) Δείξτε ότι αν αρχικά $r = r_0$, $\theta = \arctan\sqrt{2}$, $\phi = 0$, $\dot r = 0$, $\dot\theta = 0$, $\dot\phi = \pm\omega$, με $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{mr_0^4}}$, οι τιμές των ολοκληρωμάτων είναι $E = 0$, $\beta = 0$, $p_\phi^2 = 4m\lambda/3^{3/2}$ και η τροχιά είναι ομαλή κυκλική με $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \arctan\sqrt{2}$, $\phi(t) = \pm\omega t$.

Θέμα $2^{\text{ο}}$:

Τα δαχτυλίδια $m_1 = 2m$ και $m_2 = m$ του σχήματος συνδέονται τόσο μεταξύ τους όσο και με το σταθερό σημείο Α μέσω τριών ίδιων ελατηρίων σταθεράς $k = m\Omega^2$ και μηδενικού φυσικού μήκους. Τα δαχτυλίδια αυτά μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε παράλληλους άξονες που πρακτικά ταυτίζονται με τον άξονα y οριζόντιου επιπέδου Oxy (η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο – αγνοήστε τις κρούσεις μεταξύ των δαχτυλιδιών).



(α) Γράψτε την ολική κινητική και την ολική δυναμική ενέργεια.

(β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης σε μορφή πινάκων.

(γ) Μελετήστε την ταλαντωτική κίνηση των δαχτυλιδιών και συγκεκριμένα βρείτε την ιδιοσυχνότητα και τη σχέση μεταξύ y_2 και y_1 για κάθε ένα από τους δυο τρόπους ταλάντωσης.

Θέμα $3^{\text{ο}}$:

Η Χαμιλτονιανή ενός σωματίου μάζας m που κινείται σχετικιστικά στον άξονα x είναι $H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + V(x)$, όπου c η (σταθερή) ταχύτητα του φωτός και $V(x)$ η δυναμική ενέργεια.

(α) Δείξτε ότι η σχέση μεταξύ ταχύτητας $\dot x$ και ορμής p είναι $\dot x = \dfrac{pc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} \;\Leftrightarrow\; p = \dfrac{m\dot x}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot x^2}{c^2}}}$ και ότι η εξίσωση κίνησης για την ορμή είναι $\dot p = -\dfrac{dV}{dx}$.

(β) Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή του σωματίου είναι $L = -mc^2\sqrt{1 - \dfrac{\dot x^2}{c^2}} - V(x)$.

(γ) Έστω ότι $V(x) = -Fx$ με $F =$ σταθερό (αντιστοιχεί σε κίνηση υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $\boldsymbol{F} = F\hat x$) και αρχικά το σωμάτιο βρίσκεται ακίνητο στο $x = 0$. Ποια η θέση του μετά από χρόνο t; Δείξτε ότι για χρόνους $t \ll mc/F$ η ταχύτητα παραμένει μη σχετικιστική ($\dot x \ll c$) και η θέση δίνεται από τη σχέση που ισχύει στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση $\left(x = \dfrac{1}{2}\dfrac{F}{m}t^2\right)$.

Θέμα $4^{\text{ο}}$:

Έστω σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με Λαγκρανζιανή $L = \dfrac{1}{2}m\dot q^2 - \dfrac{1}{2}kq^2 + \lambda q\dot q$ (όπου m, k, λ σταθερές και q η γενικευμένη συντεταγμένη).

(α) Ποια η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή H;

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $Q = q$, $P = p - \lambda q$ είναι κανονικός και μετατρέπει τη Χαμιλτονιανή σε $K = \dfrac{P^2}{2m} + \dfrac{kQ^2}{2}$.

(γ) Χρησιμοποιώντας τις κανονικές εξισώσεις για τη νέα Χαμιλτονιανή K δείξτε ότι η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή είναι $L' = P\dot Q - K = \dfrac{1}{2}m\dot q^2 - \dfrac{1}{2}kq^2$. Γράφοντας κατάλληλα τη διαφορά $L - L' = \lambda q\dot q$ αιτιολογήστε γιατί οι L και L' είναι ισοδύναμες.