



Όνοματεπώνυμο: _____, ΑΜ: _____

Θέμα 1^ο:

Δακτυλίδι μάζας m είναι περασμένο σε λεία, κατακόρυφη, κυκλική στεφάνη ακτίνας R . Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας g και η στεφάνη περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

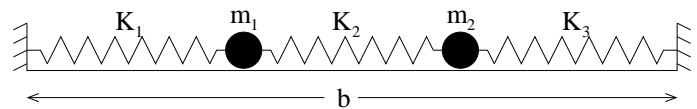
(α) Ποιες οι Lagrangian και Hamiltonian του προβλήματος;

(β) Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης της μάζας m και ένα ολοκλήρωμα κίνησης. Δείξτε ότι οι δύο αυτές σχέσεις είναι ισοδύναμες.

(γ) Ποια η ενέργεια της μάζας m ; Είναι σταθερή;

Θέμα 2^ο:

Στο σύστημα του σχήματος $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $K_1 = 3$, $K_2 = 2$, $K_3 = 6$ (όλα στο διεθνές σύστημα μονάδων) και τα φυσικά μήκη των ελατηρίων είναι $b/3$.



(α) Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις των μαζών γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους. Συγκεκριμένα βρείτε τις φυσικές ιδιοσυχνότητες και τους αντίστοιχους τρόπους ταλάντωσης.

(β) Έστω ότι κρατάμε την m_1 σε απόσταση a δεξιά από τη θέση ισορροπίας της, και την m_2 στη θέση ισορροπίας της. Αν αφήσουμε τις μάζες ελεύθερες την στιγμή $t = 0$, ποιες είναι οι θέσεις των μαζών σε κάθε χρόνο t ;

Θέμα 3^ο:

(α) Αν q_1, q_2 είναι οι μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας των μαζών του προηγούμενου σχήματος και p_1, p_2 οι αντίστοιχες ορμές, δείξτε ότι η Hamiltonian του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{4}p_2^2 + \frac{5}{2}q_1^2 + 4q_2^2 - 2q_1q_2.$$

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $Q_1 = q_1 - q_2$, $Q_2 = q_1 + 2q_2$, $p_1 = P_1 + P_2$, $p_2 = -P_1 + 2P_2$ είναι κανονικός και βρείτε την γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t)$.

(γ) Αφού βρείτε την νέα Hamiltonian K , γράψτε τις κανονικές εξισώσεις και αφού απαλείψετε τα P_1, P_2 , λύστε τις ως προς $Q_1(t), Q_2(t)$. Ποια η φυσική σημασία των Q_1, Q_2 ; Σχολιάστε τη μορφή της νέας Hamiltonian K .

Δίνονται οι τύποι $\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$, $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$.

Θέμα 4^ο:

Δίνεται ο μετασχηματισμός του χώρου των φάσεων $\{Q = f(q) \cos p, P = f(q) \sin p\}$. Είναι ο πιο πάνω μετασχηματισμός κανονικός για αυθαίρετη συνεχή και διαφορίσιμη συνάρτηση $f(q)$; Αν όχι να προσδιορίσετε εκείνες τις συναρτήσεις $f(q)$ που κάνουν τον πιο πάνω μετασχηματισμό κανονικό.