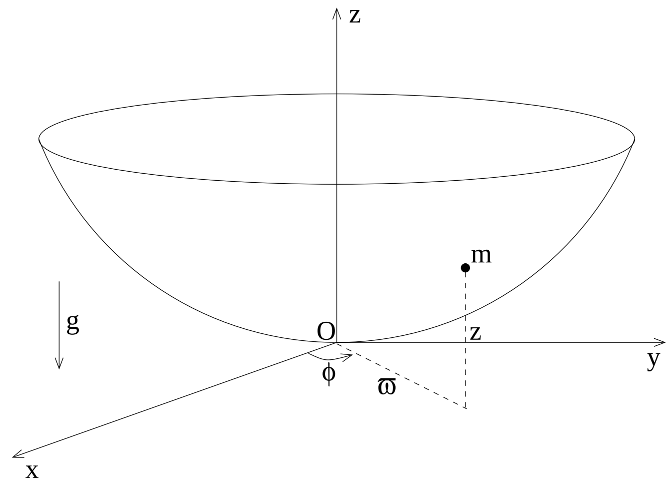
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ Μαθηματικού, 8 Ιουλίου 2009
Διάρκεια εξέτασης 2 $\frac{1}{2}$ ώρες, απαντήστε τα 2 από τα 3 θέματα
Καλή επιτυχία

Θέμα $1^{o}$:

Σώμα μάζας $m$ κινείται χωρίς τριβές πάνω σε επιφάνεια $z = \lambda\varpi^n$, όπου $\lambda$, $n$ θετικές σταθερές και $(z\,, \varpi\,, \phi)$ οι κυλινδρικές συντεταγμένες. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας $\boldsymbol{g} = -g\hat{z}$, όπως στο σχήμα.




(α) Ποιές οι Lagrangian και Hamiltonian του προβλήματος;

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης της μάζας $m$ και δύο ολοκληρώματα κίνησης.

(γ) Αφού δείξετε ότι η κίνηση της μάζας μπορεί να θεωρηθεί «μονοδιάστατη», βρείτε γραφικά τα όρια της κίνησης που αντιστοιχούν σε δοσμένες τιμές των δύο ολοκληρωμάτων. Δώστε το αναλυτικό αποτέλεσμα για τα όρια στην περίπτωση $n = 2$.

(δ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται σε ακτίνα $\varpi|_{t=0} = \varpi_0$ και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0$. Ποιά πρέπει να είναι η $\boldsymbol{v}_0$ ώστε να εκτελέσει κυκλική τροχιά $\varpi(t) = \varpi_0$;

Θέμα $2^{o}$:

Ένα εκκρεμές αποτελείται από μια σημειακή μάζα $m$ στερεωμένη στο ένα άκρο ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους και σταθεράς $k$, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται σε ακλόνητο στήριγμα.

(α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος για κινήσεις της μάζας στο κατακόρυφο επίπεδο στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης $\boldsymbol{g}$, χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες $x$ και $z$ ($\hat{x}$ οριζόντιο και $\hat{z}$ κατακόρυφο προς τα κάτω).

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $x = r\sin\phi$, $z = z_0 + r\cos\phi$ με $z_0 = mg/k$ δημιουργεί αγνοήσιμη συντεταγμένη στη νέα Λαγκρανζιανή και βρείτε το σχετικό ολοκλήρωμα. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα αυτό, συναρτήσει των συντεταγμένων $x$ και $z$, γράφεται $m\,(\dot{x}z - x\dot{z} - z_0\dot{x}) =$ σταθερό.
*Υπόδειξη:* Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο $\left\{\phi = \arctan\dfrac{x}{z - z_0}\,, r = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}\right\}$ και $\dfrac{d\arctan\xi}{d\xi} = \dfrac{1}{1+\xi^2}$.

(γ) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange που προκύπτουν από την αρχική Λαγκρανζιανή $L(x\,, z\,, \dot{x}\,, \dot{z})$ και βρείτε τη γενική λύση $x = x(t)$, $z = z(t)$. Τι περιγράφει;

(δ) Ποια η λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$, $z|_{t=0} = mg/k$, $\dot{z}|_{t=0} = v_0$; Απαλείφοντας τον χρόνο δείξτε ότι η τροχιά είναι ελλειπτική. Ποιά πρέπει να είναι η $v_0$ ώστε το σώμα να περνά από την αρχή των αξόνων $x = z = 0$; Σε ποιούς χρόνους θα συμβεί αυτό;

Θέμα $3^{o}$:

Σε ένα σύστημα με δύο γενικευμένες συντεταγμένες $q_1$, $q_2$ και αντίστοιχες ορμές $p_1$, $p_2$, εκτελούμε μετασχηματισμό

$$Q_1 = q_1\cos\phi + q_2\sin\phi\,, \quad Q_2 = -q_1\sin\phi + q_2\cos\phi\,, \quad p_1 = p_1\,(q_1\,, q_2\,, P_1\,, P_2)\;, \quad p_2 = p_2\,(q_1\,, q_2\,, P_1\,, P_2)\;,$$

όπου $\phi$ σταθερά.

(α) Ποιές οι γενικότερες συναρτήσεις $p_1\,(q_1\,, q_2\,, P_1\,, P_2)$ και $p_2\,(q_1\,, q_2\,, P_1\,, P_2)$ για τις οποίες ο μετασχηματισμός είναι κανονικός;

(β) Βρείτε κανονικό μετασχηματισμό ο οποίος μετασχηματίζει την Hamiltonian $H = (p_1 - q_1)^2 + p_2^2 + \dfrac{1}{2}\,(q_1 + q_2)^2$ σε $K = P_1^2 + P_2^2 + Q_1^2$.

(γ) Γράψτε και λύστε τις κανονικές εξισώσεις για την Hamiltonian $K = P_1^2 + P_2^2 + Q_1^2$.

Δίνονται οι τύποι $\dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i\,, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i\,, \quad K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}\,.$