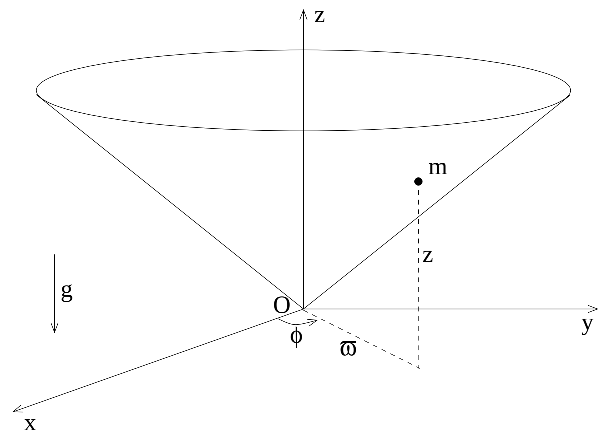
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ Μαθηματικού, 5 Σεπτεμβρίου 2008
Διάρκεια εξέτασης 2 $\frac{1}{2}$ ώρες, <u>απαντήστε τα 3 από τα 4 θέματα</u>
Καλή επιτυχία

<u>Θέμα 1^{o}:</u>

Σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβές στο εσωτερικό κωνικής επιφάνειας η οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες $(z\,,\varpi\,,\phi)$ έχει εξίσωση $z=\lambda\varpi$, όπου λ θετική σταθερά. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές πεδίο βαρύτητας $\boldsymbol{g}=-g\hat{z}$, όπως στο δίπλα σχήμα.



(α) Ποιά η Lagrangian του προβλήματος και οι εξισώσεις κίνησης για τις $\varpi(t)$ και $\phi(t)$;

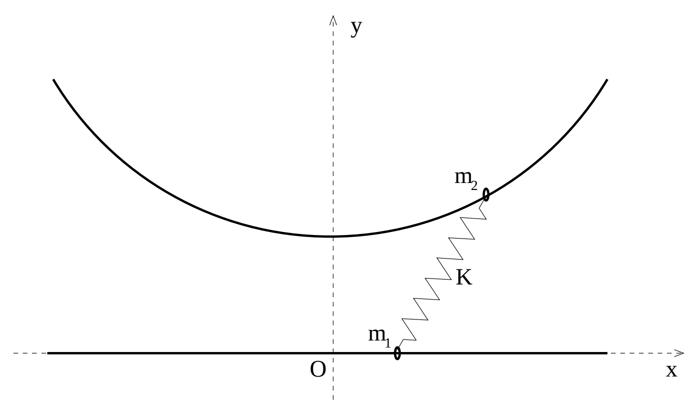
(β) Συνδυάστε τις δύο εξισώσεις κίνησης και βρείτε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για την $\varpi(t)$. Βρείτε ένα ολοκλήρωμα αυτής της εξίσωσης που κατεβάζει την τάξη της σε πρώτη. Ποιά η φυσική σημασία του ολοκληρώματος αυτού;

(γ) Βρείτε ποιά πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα της μάζας ώστε να εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας ϖ_o. Εκφράστε το αποτέλεσμα συναρτήσει των λ, g και ϖ_o.

(δ) Ενώ το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση $\varpi=\varpi_o$ με περιστροφική ταχύτητα $v_o\hat{\phi}$, του προσδίδουμε μια μικρή ταχύτητα $\delta v\ll v_o$ με διεύθυνση πάνω στην κωνική επιφάνεια και κάθετα στην $\boldsymbol{v}_o$. Λόγω της μικρής αυτής αύξησης της ταχύτητας η ενέργεια αυξάνεται κατά $m|\delta v|^2/2$ και το σώμα εκτελεί ταλάντωση μικρού πλάτους γύρω από την κυκλική τροχιά $\varpi=\varpi_o$. Ποιά η κυκλική συχνότητα και η περίοδος αυτής της ταλάντωσης σαν συνάρτηση των λ, g και ϖ_o; Ποιός ο λόγος της περιόδου αυτής προς την περίοδο της κυκλικής κίνησης; Ποιό το πλάτος της ταλάντωσης για δοσμένο $|\delta v|/v_o$;

<u>Θέμα 2^{o}:</u>

Δύο σύρματα βρίσκονται στο επίπεδο Oxy και έχουν εξίσωση $y=0$ και $y=a+bx^2$ αντίστοιχα, με a και b θετικές σταθερές. Δύο δαχτυλίδια ίσων μαζών $m_1=m_2=m$ είναι περασμένα στα δύο σύρματα και μπορούν να γλιστρούν πάνω τους χωρίς τριβές, έχοντας θέσεις $(x_1\,,\ 0)$ και $(x_2\,,\ a+bx_2^2)$. Τα δαχτυλίδια είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=m\omega_o^2$, όπως στο δίπλα σχήμα. Θεωρήστε το φυσικό μήκος του ελατηρίου μηδενικό και την βαρύτητα αμελητέα. Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις των μαζών γύρω από την ευσταθή θέση ισορροπίας $x_1=x_2=0$. Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες και τους αντίστοιχους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης. Για κάθε φυσικό τρόπο ταλάντωσης περιγράψτε την κίνηση των μαζών (ομόρροπη ή αντίρροπη κίνηση, σχέση πλατών).



Υπόδειξη: Δείξτε ότι η προσεγγιστική έκφραση για την κινητική και δυναμική ενέργεια είναι

$$T\approx\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)\,,\quad V\approx\frac{1}{2}m\omega_o^2\left[x_1^2-2x_1x_2+(1+2ab)\,x_2^2+a^2\right]\,.$$

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Έστω σύστημα που περιγράφεται από δύο γενικευμένες συντεταγμένες q_1 και q_2 και για το οποίο η κινητική (T) και δυναμική (V) ενέργεια δίνονται από

$$T(q_1\,,q_2\,,\dot{q}_1\,,\dot{q}_2\,,t)=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2q_1+\dot{q}_2^2\right)\,,\quad V(q_1\,,q_2\,,t)=q_1^2+\sin t\,.$$

(α) Ποιά η Lagrangian του συστήματος; Ποιές οι γενικευμένες ορμές p_1, p_2 που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες q_1 και q_2 αντίστοιχα; Διατηρείται κάποια από αυτές;

(β) Ποιά η Hamiltonian H του συστήματος; Διατηρείται; Αν όχι, βρείτε μια ποσότητα που αποτελεί μέρος της H και διατηρείται. Εκφράζει την ολική ενέργεια;

<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Δυο σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 έλκονται βαρυτικά. Η έλξη αυτή αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $V=-G\dfrac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$, όπου $\boldsymbol{r}_1$ και $\boldsymbol{r}_2$ οι θέσεις των σωματιδίων. Ποιά η Λαγκρανζιανή του συστήματος; Αντί των $\boldsymbol{r}_1$ και $\boldsymbol{r}_2$ χρησιμοποιήστε τις συντεταγμένες της σχετικής θέσης $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ και του κέντρου μάζας $\boldsymbol{R}=\dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$. Ποιά η Λαγκρανζιανή σε αυτές τις συντεταγμένες; Υπάρχουν ολοκληρώματα;