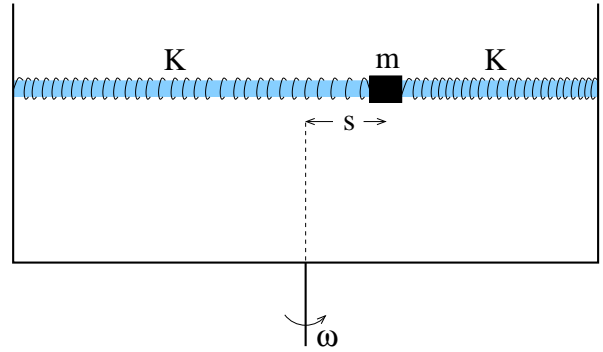




Θέμα 1<sup>ο</sup>:

Ένα δακτυλίδι μάζας  $m$  μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε μια οριζόντια ράβδο η οποία είναι στερεωμένη μέσα σε ένα κουτί. Το δακτυλίδι συνδέεται με τα τοιχώματα του κουτιού μέσω δύο αβαρών ίδιων ελατηρίων σταθεράς  $K$ , όπως δείχνει το σχήμα. Το κουτί περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ .



(α) Ποιά η Lagrangian του προβλήματος και η εξίσωση κίνησης για την  $s(t)$ ;

(β) Ποιά η συνθήκη ώστε το δακτυλίδι να ισορροπεί σε σημείο διαφορετικό από το κέντρο της ράβδου;

(γ) Αν για  $t = 0$  είναι  $s(0) = s_0$  (ώστε το σώμα να είναι μέσα στο κουτί) και  $ds(0)/dt = 0$  (μηδενική αρχική ταχύτητα) βρείτε την συνάρτηση  $s(t)$ . (Διαχωρίστε τρεις περιπτώσεις.)

Θέμα 2<sup>ο</sup>:

Σφήνα μάζας  $m_2$  έχει σχήμα τεταρτοκυκλίου ακτίνας  $R$  (όπως στο σχήμα) και είναι ελεύθερη να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Στην επιφάνεια της σφήνας κινείται χωρίς τριβές σημειακό σώμα μάζας  $m_1$ . Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας  $g$ .

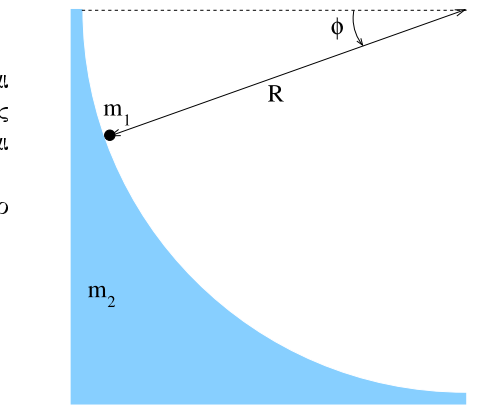
Στο χρόνο  $t = 0$  η σφήνα είναι ακίνητη και το σώμα  $m_1$  αφήνεται από το ανώτερο σημείο του τεταρτοκυκλίου ( $\phi = 0$ ).

Να μελετηθεί η κίνηση του συστήματος και συγκεκριμένα

(α) να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης και

(β) ναδειχθεί ότι ο χρόνος  $t$  που αντιστοιχεί σε γωνία  $\phi$  είναι

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}} \int_0^\phi \sqrt{\frac{m_1 \cos^2 \phi + m_2}{(m_1 + m_2) \sin \phi}} d\phi.$$



Θέμα 3<sup>ο</sup>:

Έστω ότι η Lagrangian ενός συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας γράφεται

$$L = a(q) \frac{\dot{q}^2}{2} - b(q), \text{ με } a \neq 0 \text{ και } \frac{d^2b}{dq^2} \neq 0.$$

Ποιά η εξίσωση που καθορίζει τη συνάρτηση  $q(t)$ ;

Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας  $q(t) = q_0$  καθορίζονται από τα ακρότατα της συνάρτησης  $b(q)$ . Επίσης, ότι ένα σημείο ισορροπίας  $q(t) = q_0$  είναι ευσταθές αν ισχύει

$$\frac{1}{a(q_0)} \left. \frac{d^2b}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0.$$

Ποιά η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από σημείο ευσταθούς ισορροπίας;

Θέμα 4<sup>ο</sup>:

Η Hamiltonian ενός συστήματος με γενικευμένες συντεταγμένες  $(q_1, q_2)$  και αντίστοιχες γενικευμένες ορμές  $(p_1, p_2)$  είναι

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 + q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2.$$

(α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός  $Q_1 = q_2 - q_1 \sqrt{2}$ ,  $Q_2 = q_2 + q_1 \sqrt{2}$ ,  $p_1 = (P_2 - P_1) \sqrt{2}$ ,  $p_2 = P_1 + P_2$  είναι κανονικός και βρείτε την γεννήτρια συνάρτηση  $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t)$ .

(β) Αφού βρείτε την νέα Hamiltonian  $K$ , γράψτε τις κανονικές εξισώσεις και αφού απαλείψετε τα  $P_1, P_2$ , λύστε τις ως προς  $Q_1(t), Q_2(t)$ . Ποιά η φυσική σημασία των  $Q_1, Q_2$ ; Σχολιάστε τη μορφή της νέας Hamiltonian  $K$ .

Δίνονται οι τύποι  $\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$ ,  $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ .