$\boxed{1}$:

Ποιό το κέντρο μάζας μιας ράβδου μήκους ℓ της οποίας η πυκνότητα είναι ανάλογη της απόστασης από το ένα άκρο της;

$\boxed{2}$:

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται αρχικά σε απόσταση r_0 και είναι ακίνητα. Λόγω της βαρυτικής έλξης αρχίζουν να κινούνται το ένα προς το άλλο. Δείξτε ότι η απόσταση μεταξύ τους θα είναι r μετά από χρόνο

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\ \left[\sqrt{\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} + \arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right] .$$

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

Αν θεωρήσουμε άξονα $x'Ox$ πάνω στη ράβδο ώστε τα άκρα της ράβδου να είναι στα σημεία $x = 0$ και $x = \ell$, η γραμμική πυκνότητα της ράβδου είναι $\lambda = Cx$ (C είναι η σταθερά της αναλογίας).

Η θέση του κέντρου μάζας είναι $x_{\kappa\mu} = \dfrac{\int_0^\ell x\lambda dx}{\int_0^\ell \lambda dx} = \dfrac{\int_0^\ell Cx^2 dx}{\int_0^\ell Cx dx} \Leftrightarrow \boxed{x_{\kappa\mu} = 2\ell/3}$.

$\boxed{2}$:

Αν $\vec{r}$ το διάνυσμα από το m_1 στο m_2, ξέρουμε ότι $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$, όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ και $\vec{F}_{12}$ η βαρυτική δύναμη που ασκεί το m_1 στο m_2. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η κίνηση είναι μονοδιάστατη, έστω πάνω σε άξονα $x'Ox$, οπότε $\vec{r} = r\hat{x}$, $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{x}$ και $\vec{F}_{12} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{x}$. Η εξίσωση κίνησης είναι λοιπόν $\mu\ddot{r} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$. Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση πολλαπλασιάζοντάς την με $\dot{r}$:

$$\mu\dot{r}\ddot{r} + Gm_1m_2\frac{\dot{r}}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mu\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = E\,.$$

Η τιμή της σταθεράς E καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Αρχικά είναι $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ (τα σώματα ακίνητα), οπότε $E = -Gm_1m_2/r_0$ και η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$\frac{\mu\dot{r}^2}{2} = Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \xLeftrightarrow{\dot{r}<0} \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}\,.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\int_0^t dt = -\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}} \Leftrightarrow t = -\sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{r_0}dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}\,.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $r = r_0\cos^2\xi$, $dr = -2r_0\sin\xi\cos\xi\; d\xi$, με το κάτω όριο ($r = r_0$) να είναι το $\xi = 0$ και το πάνω όριο ($r = r$) να είναι το $\xi = \arccos\sqrt{\dfrac{r}{r_0}} \in \left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα[1]

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}} 2\cos^2\xi\; d\xi = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}} [1+\cos(2\xi)]\,d\xi =$$

$$\sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\left[\xi + \frac{\sin(2\xi)}{2}\right]_0^{\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}} = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\left[\xi + \cos\xi\sqrt{1-\cos^2\xi}\right]_0^{\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}} =$$

$$\sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\left(\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1-\frac{r}{r_0}}\right) \Leftrightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\;\left[\sqrt{\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} + \arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right]}\,.$$

(Τα σώματα θα συγκρουστούν ($r = 0$) σε χρόνο $t_\sigma = (\pi/2)\sqrt{r_0^3/[2G(m_1+m_2)]}$).

[1] Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\sin\xi \geq 0$, $\cos\xi > 0$.