6ο σετ ασκήσεων Μηχανικής Ι

$\boxed{1}$:

Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F = -kr\,, k > 0$. Ποιά η δυναμική ενέργεια $V(r)$ αν θεωρήσουμε $V(r=0) = 0$; Για ποιά τιμή της ενέργειας και της στροφορμής θα είναι η τροχιά κυκλική με ακτίνα a; Ποιά η συχνότητά της;

$\boxed{2}$:

Να βρεθεί πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ μέσα στο οποίο είναι δυνατή η ύπαρξη τροχιάς $r = r_0 e^{\phi/\phi_0}$, όπου r_0 και ϕ_0 θετικές σταθερές (r και ϕ είναι οι πολικές συντεταγμένες). Ποιές οι συναρτήσεις $\phi(t)$ και $r(t)$ γι΄ αυτή την τροχιά;

$\boxed{3}$:

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^n\,, k > 0\,, n > 1\,, n \neq 3$.

(α) Ποιά η δυναμική ενέργεια; Διαλέξτε τη σταθερά ώστε να μηδενίζεται στο $r \to \infty$.

(β) Αν το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας r_o, ποιό το r_o για δοσμένη στροφορμή του σώματος L; Ποιά η ενέργεια E_o;

(γ) Για ποιές τιμές του εκθέτη n η κυκλική τροχιά $r = r_\text{o}$ είναι ευσταθής; (Θεωρείστε ότι η διαταραγμένη τροχιά έχει ίδια στροφορμή με την κυκλική τροχιά.)

(δ) Έστω το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά $r = r_\text{o}$, έχει στροφορμή L και η τιμή του εκθέτη είναι $1 < n < 3$. Κάποια στιγμή δίνουμε ενέργεια ΔE χωρίς να αλλάξουμε τη στροφορμή. Για ποιές τιμές του ΔE η κίνηση παραμένει περατωμένη;
Ποιό το σχήμα της περατωμένης τροχιάς αν $n = 2$; (Απόδειξη δεν ζητείται.)

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

Η δυναμική ενέργεια για δύναμη της μορφής $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ είναι $V(r) = -\int f(r)dr = \frac{kr^2}{2} + C$, όπου C η σταθερά ολοκλήρωσης. Με $V(r=0) = 0$ βρίσκουμε $C = 0$, οπότε $\boxed{V(r) = \frac{kr^2}{2}}$.

Η ενέργεια είναι $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2}$ και η στροφορμή $L = mrv_\phi$.

Στην περίπτωση κυκλικής τροχιάς $v_\phi = v$, ενώ η δύναμη $\vec{F} = -kr\hat{r}$ ισούται με την κεντρομόλο $\frac{mv^2}{r}\hat{\eta}$ με $\hat{\eta} = -\hat{r}$ και $r = a$. Άρα $\frac{mv^2}{a} = ka \Leftrightarrow v = a\sqrt{\frac{k}{m}}$.

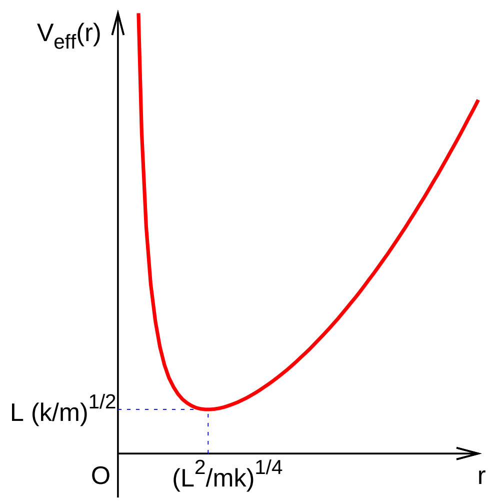
Αντικαθιστώντας $r = a$ και $v_\phi = v = a\sqrt{k/m}$ στις εκφράσεις της ενέργειας και της στροφορμής βρίσκουμε $\boxed{E = ka^2}$ και $\boxed{L = a^2\sqrt{mk}}$.

Η συχνότητα της τροχιάς είναι $\nu = \frac{1}{T}$ με την περίοδο $T = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Άρα $\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

(Αλλιώς: Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2}$.

Είναι $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = kr - \frac{L^2}{mr^3} = \frac{k}{r^3}\left(r^4 - \frac{L^2}{mk}\right)$ και $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = k + \frac{3L^2}{mr^4}$.

r	0		$\left(\frac{L^2}{mk}\right)^{1/4}$		$+\infty$
$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$		-	0	+	
$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}$		+		+	
V_{eff}	$+\infty$	$\searrow$	$L\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Η γραφική παράσταση της $V_{\text{eff}}(r)$ φαίνεται στο δίπλα σχήμα.

Η κυκλική τροχιά αντιστοιχεί σε ενέργεια E ίση με το ελάχιστο της V_{eff} και η ακτίνα a είναι η θέση του ελαχίστου. Δηλ. έχουμε $a = (L^2/mk)^{1/4} \Leftrightarrow \boxed{L = a^2\sqrt{mk}}$ και $E = L(k/m)^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{E = ka^2}$.)

$\boxed{2}$:

Η τροχιά ενός σώματος που κινείται σε κεντρική δύναμη $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right),$$

όπου $u = u(\phi)$, $u = 1/r$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση της δοσμένης τροχιάς $u = 1/r = (1/r_0)e^{-\phi/\phi_0}$ (οπότε $d^2u/d\phi^2 = u/\phi_0^2$) βρίσκουμε $f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2}{m}\left(\frac{1}{\phi_0^2} + 1\right)u^3 \overset{u=1/r}{\Longleftrightarrow} f(r) = -\frac{L^2}{m}\left(\frac{1}{\phi_0^2} + 1\right)\frac{1}{r^3}$. Δηλ. το πεδίο είναι της μορφής $\boxed{\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}\,, k > 0}$.

(Πράγματι, αν η δύναμη έχει φορά προς το κέντρο και μέτρο αντιστρόφως ανάλογο του κύβου της απόστασης, δηλ. $f(r) = -k/r^3$ με $k > 0$, οι τροχιές ικανοποιούν την

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mk}{L^2}u \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} - \left(\frac{mk}{L^2} - 1\right)u = 0\,,$$

η οποία είναι γραμμική – ομογενής και για $L^2 < mk$ έχει εκθετικές λύσεις $e^{\pm\phi/\phi_0}$ με $\phi_0 = (mk/L^2 - 1)^{-1/2}$.)

Από τη σχέση $\dot{\phi} = L/mr^2$, με $r = r_0 e^{\phi/\phi_0}$, έχουμε

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr_0^2 e^{2\phi/\phi_0}} \Leftrightarrow \int_{\phi_0}^{\phi} e^{2\phi/\phi_0} d\phi = \int_{t_0}^{t} \frac{L}{mr_0^2} dt \Leftrightarrow \boxed{\phi(t) = \phi_0 \ln\sqrt{\frac{2L}{mr_0^2\phi_0}t + C}}\,,$$

όπου C σταθερά ολοκλήρωσης.

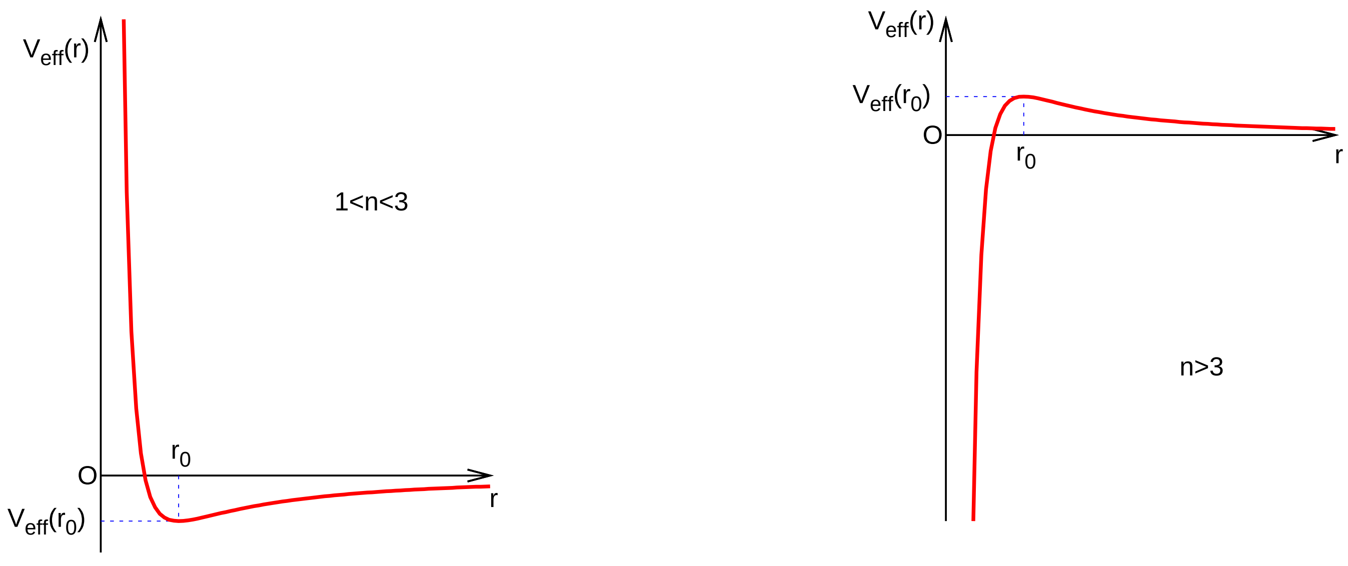
Αντικαθιστώντας την προηγούμενη $\phi(t)$ στην $r = r_0 e^{\phi/\phi_0}$ βρίσκουμε $\boxed{r(t) = r_0\sqrt{\frac{2L}{mr_0^2\phi_0}t + C}}$.

$\boxed{3}$:

(α) $V(r) = -\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{k}{r^n}\right)dr \Leftrightarrow \boxed{V(r) = -\frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}}}$.

(Ισοδύναμα, από το αόριστο ολοκλήρωμα $V(r) = -\int f(r)dr$ θα βρίσκαμε $V(r) = C - [k/(n-1)](1/r^{n-1})$, και η απαίτηση $\lim_{r\to\infty} V = 0$ θα προσδιόριζε τη σταθερά της ολοκλήρωσης $C = 0$.)

(β) Η μελέτη της $V_{\rm eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}}$ οδηγεί στο παρακάτω σχήμα 1, ανάλογα με την τιμή του εκθέτη n (το αριστερό σχήμα αντιστοιχεί σε $1 < n < 3$ και το δεξιό σε $n > 3$). Η ακτίνα στην οποία η $V_{\rm eff}$ γίνεται ακρότατη (ελάχιστη αν $1 < n < 3$ και μέγιστη αν $n > 3$) είναι $r_0 = \left(\frac{L^2}{mk}\right)^{1/(3-n)}$ και η ακρότατη τιμή είναι $V_{\rm eff}(r_0) = \frac{(n-3)k}{2(n-1)r_0^{n-1}}$. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι αυτή που αντιστοιχεί



Σχήμα 1: Η $V_{\rm eff}(r)$ για $1 < n < 3$ (αριστερά) και $n > 3$ (δεξιά).

στην ακρότατη τιμή του $V_{\rm eff}(r)$ – δηλ. είναι η r_0 – και η ενέργεια ισούται με την ακρότατη αυτή τιμή

$V_{\text{eff}}(r_0)$. Έχουμε λοιπόν $\boxed{r_0 = \left(\frac{L^2}{mk}\right)^{1/(3-n)}}$ και $E_0 = V_{\text{eff}}(r_0) \Leftrightarrow \boxed{E_0 = \frac{(n-3)k}{2(n-1)r_0^{n-1}}}$.

(Το ερώτημα αυτό θα μπορούσε να απαντηθεί εξισώνοντας την κεντρομόλο δύναμη με τη δύναμη F, δηλ. $mv^2/r_0 = k/r_0^n$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση $L = mr_0v \Leftrightarrow v = L/mr_0$ για την ταχύτητα.)

(γ) Αφού η στροφορμή παραμένει σταθερή, μπορούμε να μελετήσουμε την ευστάθεια χρησιμοποιώντας το διάγραμμα της V_{eff} που φαίνεται στο σχήμα 1 (η συνάρτηση αυτή παραμένει ίδια αν η στροφορμή δεν αλλάζει). Προφανώς η κυκλική τροχιά για $1 < n < 3$ είναι ευσταθής (η V_{eff} έχει ελάχιστο στο $r = r_0$) ενώ για $n > 3$ είναι ασταθής (η V_{eff} έχει μέγιστο στο $r = r_0$).

(δ) Από το αριστερό μέρος του σχήματος 1 συμπεραίνουμε ότι η τροχιά είναι φραγμένη όσο η ενέργεια είναι αρνητική. Πρέπει λοιπόν $E < 0 \Leftrightarrow E_0 + \Delta E < 0$, δηλ. η ενέργεια που δίνουμε πρέπει να είναι $\Delta E < -E_0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta E < \frac{(3-n)k}{2(n-1)r_0^{n-1}}}$.

Για $n = 2$, δηλ. για δυνάμεις $\vec{F} = -(k/r^2)\hat{r}$ με $k > 0$, ξέρουμε ότι οι τροχιές είναι κωνικές τομές και ειδικότερα για αρνητικές ενέργειες (έχοντας θεωρήσει μηδενική δυναμική ενέργεια στο $r \to \infty$) ότι είναι ελλείψεις. Επομένως το σχήμα της νέας τροχιάς είναι έλλειψη.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης αυτής είναι $e = \sqrt{1 + 2EL^2/mk^2}$ με $E = -k/2r_0 + \Delta E = -mk^2/2L^2 + \Delta E$, δηλ. είναι $e = \sqrt{\Delta E/|E_0|}$. Για μικρές τιμές του $\Delta E/|E_0|$ παραμένει κοντά στο μηδέν (δηλ. η νέα τροχιά είναι σχεδόν κυκλική), ενώ για μεγαλύτερες τιμές του $\Delta E/|E_0|$ γίνεται μεγαλύτερη, αλλά παραμένει πάντα μικρότερη της μονάδας αφού $\Delta E < |E_0|$. Η εξίσωση της νέας τροχιάς είναι

$$r = \frac{r_0}{1 + \sqrt{\frac{\Delta E}{|E_0|}} \cos\phi}$$

αφού το L^2/mk που υπάρχει στον αριθμητή της εξίσωσης $r = r(\phi)$ δεν αλλάζει – λόγω του ότι η στροφορμή δεν άλλαξε.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η νέα ελλειπτική τροχιά γύρω από την αρχική κυκλική για διάφορες τιμές του $\Delta E/|E_0|$ (η αρχική κυκλική τροχιά αντιστοιχεί σε $\Delta E = 0$).