$\boxed{1}$:
Σώμα μάζας $m$ κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση δύναμης $F = -m\omega_0^2 x + m f_0 \cos(\omega t)$, όπου $\omega_0$, $\omega$, $f_0$ θετικές σταθερές ποσότητες.
Αν για $t = 0$, $x = 0$ και $v = 0$, βρείτε τα $x(t)$, $v(t)$.
Σχολιάστε τους όρους της λύσης.
Ποιά η φυσική σημασία της περίπτωσης $\omega \approx \omega_0$;

$\boxed{2}$:
Σώμα με $m = 1$ κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από $V(x) = 1 - \cos x$ (όλα στο σύστημα μονάδων mksA).
(α) Ποιά η εξίσωση κίνησης;
(β) Ποιά τα σημεία ισορροπίας (ευσταθή και ασταθή);
(γ) Ποιά η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από κάποιο ευσταθές σημείο ισορροπίας;

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

Η λύση του νόμου του Νεύτωνα $m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + m f_0 \cos(\omega t) \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$, αποτελείται από το άθροισμα της λύσης της ομογενούς $x_{o\mu} = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$ με μια μερική λύση $x_{\mu\varepsilon\rho}$. Η μερική λύση είναι της μορφής $x_{\mu\varepsilon\rho} = A\cos(\omega t)$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε $A = f_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Άρα

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) + \frac{f_0 \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{και} \quad v(t) = \dot{x} = a\omega_0 \cos(\omega_0 t) - b\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \frac{f_0 \omega \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες $x(t=0) = 0 \Leftrightarrow b = -f_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$ και $v(t=0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$, οπότε

$$\boxed{x(t) = f_0 \frac{-\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad \text{και} \quad \boxed{v(t) = f_0 \frac{\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{1}$$

Οι πρώτοι όροι (με όρισμα $\omega_0 t$) εκφράζουν ταλάντωση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, ενώ οι δεύτεροι όροι (με όρισμα $\omega t$) εκφράζουν ταλάντωση με την συχνότητα του διεγέρτη.

Για $\omega \approx \omega_0$ το πλάτος μεγιστοποιείται (συντονισμός).

Για $\omega = \omega_0$ η λύση μπορεί να βρεθεί σαν όριο της προηγούμενης έκφρασης για το $x(t)$, για $\omega \to \omega_0$.

Είναι $x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} f_0 \frac{-\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \overset{\text{l'Hôpital}}{=\!=\!=} \lim_{\omega \to \omega_0} f_0 \frac{\frac{d}{d\omega}[-\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)]}{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)} = f_0 \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t).$

(Το ίδιο μπορεί να βρεθεί και από την αρχική διαφορική εξίσωση, η οποία για $\omega = \omega_0$ γίνεται $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_0 t)$. Η λύση της ομογενούς είναι $x_{o\mu} = a' \sin(\omega_0 t) + b' \cos(\omega_0 t)$ , ενώ η μερική λύση είναι $f_0 \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $a' = 0$ και $b' = 0$, οπότε βρίσκουμε $x(t) = f_0 \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.)

Σημειώστε ότι η γενική λύση (1), χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos B - \cos C = 2\sin\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}$, μπορεί να γραφεί σαν

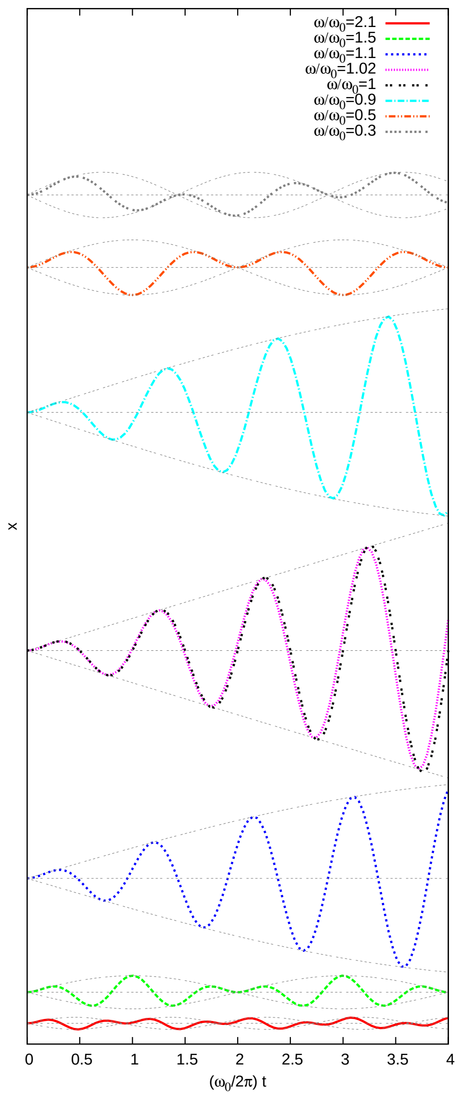
$$x(t) = \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right) \tag{2}$$

και εκφράζει διακρότημα για $\omega \approx \omega_0$. Για $\omega = \omega_0$ η περίοδος του διακροτήματος απειρίζεται όπως και το πλάτος του. Γράφοντας τη σχέση (2) σαν

$$x(t) = \frac{f_0 t}{\omega_0 + \omega} \frac{\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right)}{\frac{\omega_0 - \omega}{2} t} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right)$$

βρίσκουμε αμέσως τη μορφή της λύσης για $\omega = \omega_0$ (χρησιμοποιώντας το όριο $\lim_{\xi \to 0} \frac{\sin\xi}{\xi} = 1$), $x(t) = [f_0/(2\omega_0)] t \sin(\omega_0 t)$.

Στο δίπλα σχήμα φαίνεται η λύση για διάφορες τιμές του $\omega$ (τα $\omega_0$, $f_0$ είναι ίδια σε όλες τις λύσεις). Για μεγάλες τιμές του $\omega/\omega_0$ η λύση (2) γίνεται $(2f_0/\omega^2)\sin^2(\omega t/2)$, δηλ. το πλάτος τείνει στο μηδέν ενώ η περίοδος τείνει στην τιμή $2\pi/\omega$. Για $\omega \approx \omega_0$ βλέπουμε πως το πλάτος και η περίοδος μεγαλώνουν και η λύση τείνει στην $[(f_0/(2\omega_0)] t \sin(\omega_0 t)$. Για μικρές τιμές του $\omega/\omega_0$ η λύση (2) γίνεται $(2f_0/\omega_0^2)\sin^2(\omega_0 t/2)$.



$\boxed{2}$:

(α) Η δύναμη είναι $\vec{F} = -\nabla V = -\sin x\hat{x}$, οπότε ο νόμος του Νεύτωνα δίνει την εξίσωση κίνησης $\boxed{\ddot{x} + \sin x = 0}$.

(β) Τα σημεία ισορροπίας είναι σταθερές λύσεις της εξίσωσης κίνησης. Για τις σταθερές αυτές λύσεις $x(t) = x_0 =$ σταθερά, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ και η εξίσωση κίνησης δίνει $0 + \sin x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$.

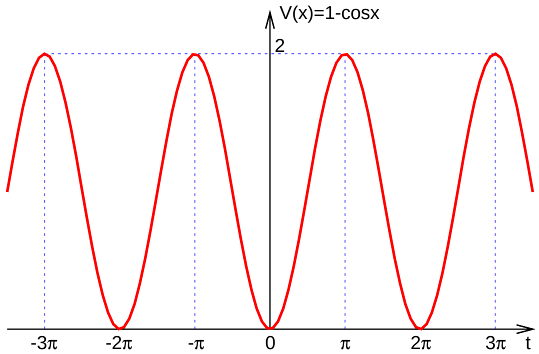
Για $x = k\pi + q$ με $|q| \ll 1$ είναι $F = -\sin(k\pi + q) = -\cos(k\pi)\sin q = -(-1)^k \sin q \approx -(-1)^k q$. Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{q} + (-1)^k q = 0$.

• Για άρτια $k$ είναι $\ddot{q} + q = 0$ με λύσεις $q = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ οι οποίες περιγράφουν ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας. Επομένως τα σημεία ισορροπίας αυτά είναι ευσταθή.

• Για περιττά $k$ είναι $\ddot{q} - q = 0$ με λύσεις $q = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ οι οποίες απειρίζονται σε μεγάλους χρόνους. Επομένως τα σημεία ισορροπίας αυτά είναι ασταθή.

(γ) Η κίνηση γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας $x_0 = k\pi$ όπου $k$ άρτιος ακέραιος αριθμός βρέθηκε πριν να είναι $q = C_1 \sin t + C_2 \cos t \Leftrightarrow x = k\pi + C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Αυτή είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

(Για τα ερωτήματα (β) και (γ) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή έχει ελάχιστα (ίσα με μηδέν) όταν $x/2 = 0\,,\ \pm\pi\,,\ \pm 2\pi\,,\ \ldots \Leftrightarrow x = 0\,,\ \pm 2\pi\,,\ \pm 4\pi\,,\ \ldots$ – όπως άλλωστε φαίνεται και από το δίπλα σχήμα – και μέγιστα (ίσα με 2) όταν $x/2 = \pm\pi/2\,,\ \pm 3\pi/2\,,\ \pm 5\pi/2\,,\ \ldots \Leftrightarrow x = \pm\pi\,,\ \pm 3\pi\,,\ \pm 5\pi\,,\ \ldots$ Τα ελάχιστα (στα οποία $d^2V/dx^2 > 0$) είναι ευσταθή σημεία ισορροπίας, ενώ τα μέγιστα (στα οποία $d^2V/dx^2 < 0$) είναι ασταθή σημεία ισορροπίας.




Γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας $x_0 = k\pi$ με $k$ άρτιο ακέραιο αριθμό, η δυναμική ενέργεια είναι $V(x) \approx V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + (1/2)V''(x_0)(x - x_0)^2 = (1/2)(x - k\pi)^2$, οπότε η δύναμη είναι $F(x) = -dV/dx \approx -(x - k\pi)$ και ο νόμος του Νεύτωνα $\ddot{x} + (x - k\pi) = 0 \overset{q=x-k\pi}{\Longleftrightarrow} \ddot{q} + q = 0$. Αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με $\omega = 1$, άρα $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.)