$\boxed{1}$:

Μελετήστε τη μονοδιάστατη κίνηση σώματος υπό την επίδραση δύναμης που πρέρχεται από δυναμική ενέργεια $V(x) = -4a^3x^5 + 10b^3x^2$, όπου x η θέση του σώματος σε άξονα $x'Ox$ και a, b θετικές σταθερές. Συγκεκριμένα, απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Ποιά τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;

(β) Μελετήστε την κίνηση για τυχούσα ενέργεια E.

(γ) Ποιά η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από το $x = 0$;

(δ) Έστω για $t = 0$ η θέση του σώματος είναι $x(t = 0) = \frac{b}{2a}$ και η ταχύτητα $v(t = 0)$ είναι αρνητική. Περιγράψτε την κίνηση, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

(δ_1) το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση και

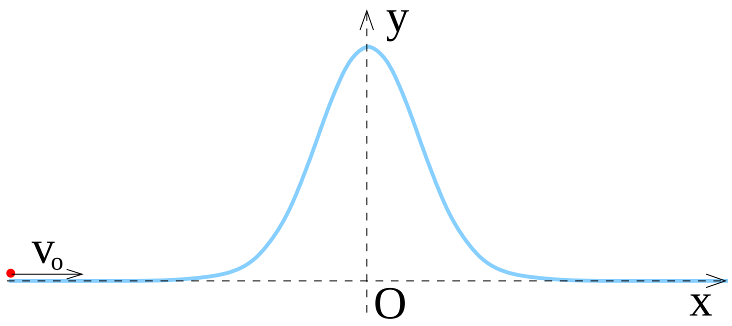
(δ_2) το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$.

$\boxed{2}$:

Σώμα κινείται πάνω σε ύψωμα της μορφής $y = y_0 e^{-(x/a)^2}$, ξεκινώντας με $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ από το $x = -\infty$.

(α) Αν αμελήσουμε τη βαρύτητα, ποιό το σημείο Α στο οποίο το σώμα χάνει την επαφή του με το δρόμο; (Τριβές δεν υπάρχουν.)

(β) Αν υπάρχει βαρύτητα $\vec{g} = -g\hat{y}$, υπάρχει περίπτωση να χάσει το σώμα την επαφή του με το δρόμο πριν το σημείο Α;



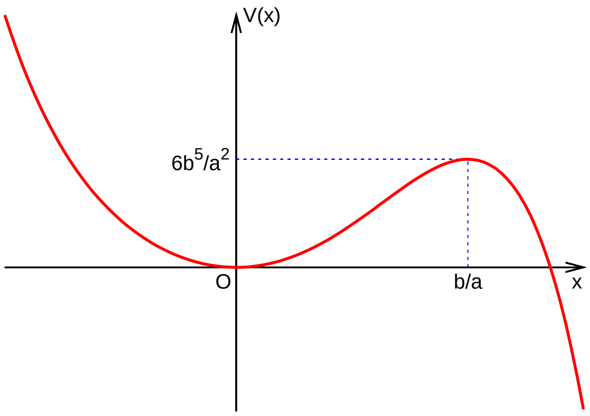
ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

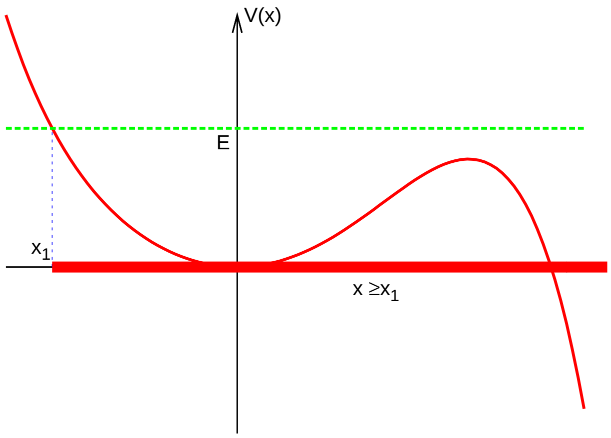
Μελέτη της συνάρτησης $V(x)$: Η συνάρτηση γράφεται $V = -4a^3x^5 + 10b^3x^2 = -4a^3x^2\left[x^3 - \frac{10}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$.
Η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{dV}{dx} = -20a^3x^4 + 20b^3x = -20a^3x\left[x^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $\frac{d^2V}{dx^2} = -80a^3x^3 + 20b^3 = -80a^3\left[x^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$.

x	$-\infty$		0		$\frac{b}{4^{1/3}a}$		$\frac{b}{a}$		$+\infty$
$\frac{dV}{dx}$		-	0	$+$		$+$	0	-	
$\frac{d^2V}{dx^2}$		$+$		$+$	0	-		-	
V	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{6b^5}{a^2}$	$\searrow$	$-\infty$

Η γραφική παράσταση της $V(x)$ φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $V(x)$.



Σχήμα 2: Η περίπτωση $E > 6b^5/a^2$.

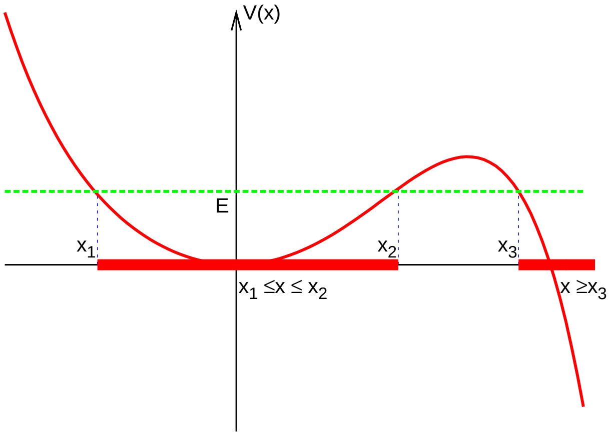
(α) Σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία όπου $dV/dx = 0$, δηλ. τα $x_{01} = 0$ και $x_{02} = b/a$. Στο $x = 0$ η συνάρτηση $V(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο, οπότε το σημείο είναι ευσταθές. Στο $x = b/a$ η συνάρτηση $V(x)$ έχει τοπικό μέγιστο, οπότε το σημείο είναι ασταθές.

(β) Από το σχήμα 1 φαίνεται ότι οι περιπτώσεις που πρέπει να ξεχωρίσουμε είναι οι (β$_1$) $E > 6b^5/a^2$, (β$_2$) $0 < E < 6b^5/a^2$, (β$_3$) $E < 0$, (β$_4$) $E = 6b^5/a^2$ και (β$_5$) $E = 0$.

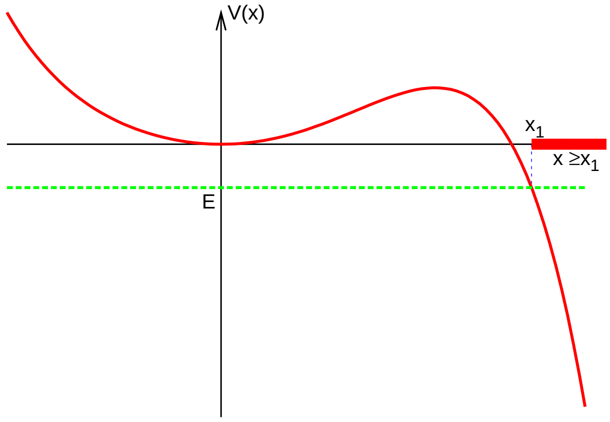
(β$_1$) Αν $E > 6b^5/a^2$ τότε η ανισότητα $V(x) \leq E$ έχει λύση $x \geq x_1$, όπου x_1 η μόνη λύση της ισότητας $V(x) = E$ (αντιστοιχεί στη τομή των καμπυλών $V(x)$ και E), βλέπε σχήμα 2. Ανεξάρτητα με την αρχική θέση x_0 του σώματος και τη φορά της ταχύτητάς του,[1] το σώμα θα καταλήξει στο $x = +\infty$. Αν $v_0 > 0$

[1] Για δεδομένα x_0 και E το μέτρο της αρχικής ταχύτητας είναι $|v_0| = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x_0)]}$ (από $\frac{mv_0^2}{2} + V(x_0) = E$).

το σώμα θα κινείται συνεχώς προς μεγαλύτερα x, αφού δεν θα συναντήσει σημείο όπου οι καμπύλες $V(x)$ και E τέμνονται, κάτι που είναι απαραίτητο ώστε να μηδενιστεί η ταχύτητα και το σώμα στη συνέχεια να αλλάξει φορά κίνησης. Αν αρχικά $v_0 < 0$, δηλ. το σώμα κινείται προς μικρότερα x, τότε θα προχωρήσει μέχρι το $x = x_1$ όπου η ταχύτητα μηδενίζεται. Στο σημείο αυτό είναι $F(x_1) = -dV/dx|_{x=x_1} > 0$, οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x και θα φτάσει στο $x = +\infty$. Σε κάθε θέση το μέτρο της ταχύτητας βρίσκεται από $mv^2/2 = T$, όπου $T = E - V(x)$ είναι η απόσταση μεταξύ των καμπυλών $V(x)$ και E στη δεδομένη θέση x.



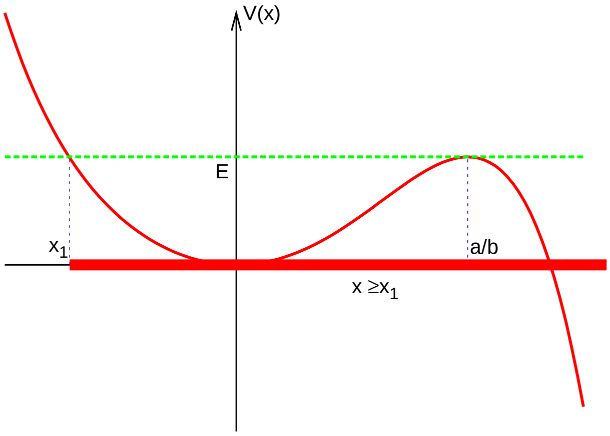
Σχήμα 3: Η περίπτωση $0 < E < 6b^5/a^2$.



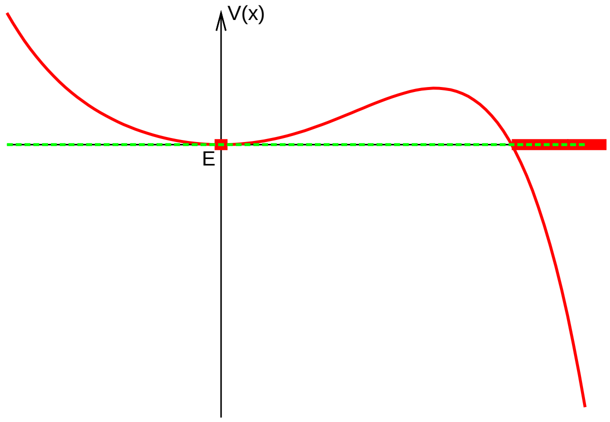
Σχήμα 4: Η περίπτωση $E < 0$.

(β$_2$) Αν $0 < E < 6b^5/a^2$ η ανισότητα $V(x) \leq E$ έχει σα λύσεις δυο περιοχές, τις $x_1 \leq x \leq x_2$ και $x \geq x_3$, όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι λύσεις της ισότητας $V(x) = E$, με $x_1 < x_2 < x_3$, βλέπε σχήμα 3.
Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο χώρο $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ θα παραμείνει για πάντα εκεί εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των ακραίων σημείων $x = x_1$ και $x = x_2$.[2]
Αν αρχικά το σώμα έχει $x_0 \geq x_3$ τότε, ανεξάρτητα από τη φορά κίνησής του θα καταλήξει στο $x = +\infty$.

(β$_3$) Αν $E < 0$, η ανισότητα $V(x) \leq E \Leftrightarrow x \geq x_1$, όπου x_1 η λύση της ισότητας $V(x) = E$, βλέπε σχήμα 4. Ανεξάρτητα από την αρχική θέση και φορά κίνησής του, το σώμα θα καταλήξει στο $x = +\infty$.



Σχήμα 5: Η περίπτωση $E = 6b^5/a^2$.



Σχήμα 6: Η περίπτωση $E = 0$.

[2] Το σώμα κινούμενο προς μεγαλύτερα x θα φτάνει στο $x = x_2$ όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται. Στο σημείο αυτό η δύναμη $F(x_2) < 0$ θα το αναγκάζει να κινηθεί προς μικρότερα x. Όμοια, όταν το σώμα κινείται προς μικρότερα x θα φτάνει στο $x = x_1$ όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται, και λόγω της $F(x_1) > 0$ θα κινείται προς μεγαλύτερα x.

(β$_4$) Το να εξετάσουμε τη περίπτωση όπου η ενέργεια είναι ακριβώς ίση με τη τιμή $6b^5/a^2$, δηλ. $E = 6b^5/a^2$, έχει μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον. Και αυτό γιατί πρακτικά δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ενέργεια με άπειρη ακρίβεια· έτσι η E θα είναι είτε λίγο μεγαλύτερη (έστω και απειροστά) από την τιμή $6b^5/a^2$ οπότε η μελέτη καλύπτεται από τη περίπτωση (β$_1$), είτε λίγο μικρότερη από $6b^5/a^2$ οπότε η μελέτη καλύπτεται από τη περίπτωση (β$_2$). Στη συνέχεια, πρώτα θα μελετηθεί η περίπτωση όπου $E = 6b^5/a^2$ και μετά θα σχολιαστεί πως αυτή θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν όριο των περιπτώσεων $E \to (6b^5/a^2)^+$ και $E \to (6b^5/a^2)^-$.

Για $E = 6b^5/a^2$ η ανισότητα $V(x) \le E$ δίνει ότι επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι η $x \ge x_1$, όπου x_1 η μικρότερη (αρνητική) λύση της ισότητας $V(x) = 6b^5/a^2$, βλέπε σχήμα 5. Ανάλογα όμως με τις αρχικές συνθήκες έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x_0 < b/a$ τότε θα καταλήξει να κινείται προς το σημείο b/a (ακόμα και αν αρχικά η ταχύτητά του είναι αρνητική οπότε θα αλλάξει φορά κίνησης στο σημείο $x = x_1$). Θεωρητικά χρειάζεται άπειρο χρόνο[3] για να φτάσει στο σημείο b/a.

• Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο $x_0 = b/a$ (οπότε έχει μηδενική ταχύτητα αφού $mv_0^2/2 = E - V(x_0) = 0$) θα παραμείνει εκεί (το σημείο b/a είναι σημείο ισορροπίας).

• Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x_0 > b/a$ και φορά κίνησης προς τα μικρότερα x ($v_0 < 0$) θα συνεχίσει για πάντα να κινείται προς το σημείο b/a (δες υποσημείωση 3).

• Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x_0 > b/a$ και φορά κίνησης προς τα μεγαλύτερα x θα καταλήξει στο $x = +\infty$.

Όπως ειπώθηκε προηγούμενα η περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν όριο της περίπτωσης (β$_1$) για $E \to (6b^5/a^2)^+$. Πράγματι, αν σκεφτούμε διαφορετικές περιπτώσεις με $E > 6b^5/a^2$, αλλά διαρκώς μειούμενο, παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια $T = E - V(b/a)$ που έχει το σώμα στο σημείο b/a διαρκώς μειώνεται, επομένως το πέρασμα του σώματος από το σημείο αυτό διαρκεί όλο και περισσότερο χρόνο. Όταν η ενέργεια γίνει ακριβώς $6b^5/a^2$ τότε η ταχύτητα στο σημείο b/a μηδενίζεται και το πέρασμα του σώματος χρειάζεται άπειρο χρόνο. (Τότε οι περιοχές $x_1 \le x < b/a$ και $x > b/a$ γίνονται ανεξάρτητες.) Όμοια, μπορούμε να σκεφτούμε τι γίνεται για διαφορετικές περιπτώσεις (β$_2$) με διαρκώς αυξανόμενη ενέργεια. Οι περιοχές $x_1 \le x \le x_2$ και $x \ge x_3$ του σχήματος 3 τείνουν να ενωθούν. Η περίοδος της

[3] Αν μελετήσουμε την κίνηση κοντά στο σημείο $x = b/a$ όπου η δυναμική ενέργεια απλοποιείται σε $V(x) \approx V(b/a) + \dfrac{dV(b/a)}{dx}\left(x - \dfrac{b}{a}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2V(b/a)}{dx^2}\left(x - \dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{6b^5}{a^2} - 30b^3\left(x - \dfrac{b}{a}\right)^2$ και η δύναμη απλοποιείται σε $F(x) = -\dfrac{dV}{dx} \approx 60b^3\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$, ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται $m\ddot{x} = 60b^3\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$ και έχει λύση $x = \dfrac{b}{a} + C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{60b^3}{m}}$. Αν η αρχική θέση είναι x_0 και το σώμα κινείται προς το σημείο b/a με $v_0 = -\omega\left(x_0 - \dfrac{b}{a}\right)$ (ώστε $\dfrac{mv_0^2}{2} + V(x_0) = E = \dfrac{6b^5}{a^2}$ και το πρόσημο της ταχύτητας είναι τέτοιο που να οδηγεί σε κίνηση προς το $x = b/a$ ανεξάρτητα αν αρχικά το σώμα έχει x_0 μεγαλύτερο ή μικρότερο από b/a), βρίσκουμε $C_1 = 0$, $C_2 = x_0 - \dfrac{b}{a}$, οπότε $x = \dfrac{b}{a} + \left(x_0 - \dfrac{b}{a}\right)e^{-\omega t}$. Συνεπώς ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει το σώμα στο σημείο b/a είναι θεωρητικά άπειρος.

Το ίδιο προκύπτει και από τη σχέση $\dot{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - V(x)\right)} \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^t dt = \pm\int_{x_0}^{b/a}\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(V(b/a) - V(x)\right)}}$, με το πάνω πρόσημο να αντιστοιχεί στην περίπτωση $x_0 < b/a$ (οπότε το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα b/a) και το κάτω πρόσημο στην περίπτωση $x_0 > b/a$. Κάνοντας το μετασχηματισμό $x = \dfrac{b}{a} \mp \xi$ βρίσκουμε $\displaystyle\int_0^t dt = \int_0^{|x_0 - b/a|}\frac{d\xi}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left[V(\frac{b}{a}) - V(\frac{b}{a} \mp \xi)\right]}}$.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα απειρίζεται, αφού για μικρά ξ η ποσότητα υπό ολοκλήρωση είναι $\dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{1}{m}\dfrac{d^2V(b/a)}{dx^2}\xi^2}} = \dfrac{1}{\omega\xi}$.

ταλάντωσης αν αρχικά $x_0 < b/a$ αυξάνεται όσο η ενέργεια πλησιάζει την τιμή $6b^5/a^2$· επίσης η κίνηση προς τα μικρότερα x αν αρχικά $x_0 > b/a$ γίνεται όλο και πιο αργή όσο η ενέργεια πλησιάζει την τιμή $6b^5/a^2$.

Πρακτικά λοιπόν η ενέργεια είτε θα είναι λίγο (έστω απειροστά) μεγαλύτερη από $6b^5/a^2$ οπότε το σώμα θα μπορέσει να περάσει από το σημείο b/a σε πεπερασμένο χρόνο, είτε θα είναι λίγο (έστω απειροστά) μικρότερη από $6b^5/a^2$ οπότε θα κάνει ταλάντωση αν αρχικά $x_0 < b/a$ ή θα καταλήξει στο $x = +\infty$ αν αρχικά $x_0 > b/a$. Επίσης αν η αρχική θέση είναι b/a, επειδή επίσης δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το x_0 με άπειρη ακρίβεια, θα είναι είτε $x_0 = (b/a)^+$ οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x και θα καταλήξει στο $x = +\infty$, είτε $x_0 = (b/a)^-$ οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μικρότερα x και θα εκτελεί ταλάντωση. Η απροσδιοριστία αυτή είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το σημείο b/a είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

(β$_5$) Αν $E = 0$ η ανισότητα $V(x) \leq 0$ δίνει λύσεις $x = 0$ ή $x \geq x_3$, όπου x_3 η θετική λύση της ισότητας $V(x) = 0$, βλέπε σχήμα 6. Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x = 0$ θα μείνει για πάντα εκεί (κάτι που ενισχύεται και από το γεγονός ότι το σημείο αυτό είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας), ενώ αν αρχικά είναι στην περιοχή $x \geq x_1$ θα καταλήξει στο $x = +\infty$.

Η περίπτωση $E = 0$ μπορεί να θεωρηθεί το όριο της περίπτωσης (β$_2$) για ενέργειες διαρκώς μειούμενες προς την τιμή $E = 0$. Η περιοχή $x_1 \leq x \leq x_2$ της περίπτωσης (β$_2$), στην οποία το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των x_1 και x_2 καταλήγει στο να βρίσκεται το σώμα ακίνητο στο σημείο $x_1 = x_2 = 0$ (μηδενικό πλάτος ταλάντωσης).

(γ) Για x κοντά στο 0 η δυναμική ενέργεια απλοποιείται σε $V(x) \approx 10b^3x^2$ και άρα η δύναμη απλοποιείται σε $F(x) \approx -20b^3x$. Ο νόμος Νεύτωνα $m\ddot{x} = -20b^3x$ έχει λύση $x = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$, όπου $\omega = \sqrt{20b^3/m}$. Άρα η κίνηση είναι περιοδική (ταλάντωση) με περίοδο $T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{m/(5b^3)}$.

(δ) Αν v_0 η αρχική ταχύτητα και $x_0 = \frac{b}{2a}$ η αρχική θέση, η ενέργεια του σώματος είναι

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + V\left(\frac{b}{2a}\right) . \tag{1}$$

Είναι $E \geq V(\frac{b}{2a})$ και αφού $V(\frac{b}{2a}) = \frac{19b^5}{8a^2} > 0$ είναι $E > 0$. Ανάλογα με το αν είναι $E < 6b^5/a^2$ ή $E > 6b^5/a^2$ έχουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις.

(δ$_1$) Αν $E < 6b^5/a^2$, το οποίο χρησιμοποιώντας τη σχέση 1 ισοδυναμεί με

$$|v_0| < \sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}} \overset{v_0<0}{\iff} v_0 > -\sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}} ,$$

το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων x_1 και x_2 τα οποία αποτελούν τις μικρότερες λύσεις της $E = V(x)$, βλέπε σχήμα 3. (Σημειώστε ότι η αρχική θέση του σώματος βρίσκεται μέσα στο διάστημα $x_1 \leq x_0 \leq x_2$. Για $E = V(\frac{b}{2a})$ – τιμή που αποτελεί την ελάχιστη πιθανή ενέργεια – είναι $x_0 = x_2$ και η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν.)

(δ$_2$) Αν $E > 6b^5/a^2$, το οποίο χρησιμοποιώντας τη σχέση 1 ισοδυναμεί με

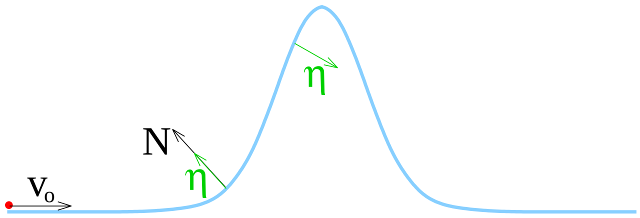
$$|v_0| > \sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}} \overset{v_0<0}{\iff} v_0 < -\sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}} ,$$

το σώμα θα κινηθεί προς μικρότερα x μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του στο σημείο $x = x_1$ όπου $E = V(x_1)$, βλέπε σχήμα 2. Στην πορεία του προς το x_1 το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση μέχρι το $x = 0$ (αφού η κινητική ενέργεια $T = E - V(x)$ αυξάνει) και στη συνέχεια επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι το x_1 όπου η ταχύτητα μηδενίζεται. Στη συνέχεια (και επειδή $F(x_1) = -dV/dx|_{x=x_1} > 0$) το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη μέχρι το $x = 0$, στη συνέχεια επιβραδυνόμενη μέχρι το $x = b/a$ όπου η κινητική του ενέργεια είναι $E - 6b^5/a^2$ και στη συνέχεια επιταχυνόμενη μέχρι το $x = +\infty$.

$\boxed{2}$:

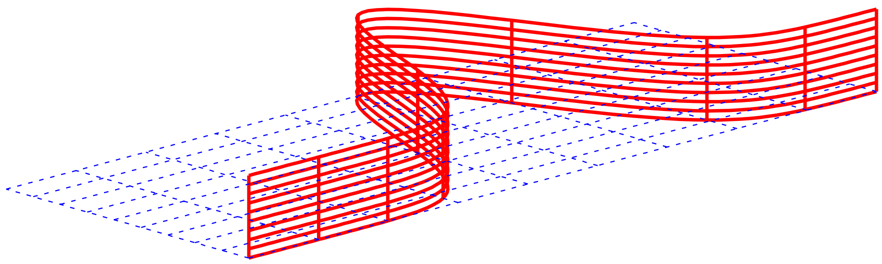
$$y = y_0 e^{-(x/a)^2}\,, y' = -\frac{2xy_0}{a^2}e^{-(x/a)^2}\,, y'' = \frac{4y_0}{a^4}\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)e^{-(x/a)^2}\,.$$

(α) Όσο $y'' > 0$, δηλ. για $|x| > \frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x < -\frac{a}{\sqrt{2}}$, το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται «πάνω» από την καμπύλη $y = y(x)$ (δηλ. προς μεγαλύτερα y από το y της τροχιάς). Στο τμήμα αυτό της τροχιάς, ο νόμος του Νεύτωνα στη διεύθυνση $\hat{\eta}$ κάθετα στη τροχιά δίνει $N = mv^2/R$, όπου R η ακτίνα καμπυλότητας και N η δύναμη που ασκεί ο δρόμος στο σώμα. Προφανώς σε αυτό το τμήμα $N > 0$ και άρα το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το δρόμο.

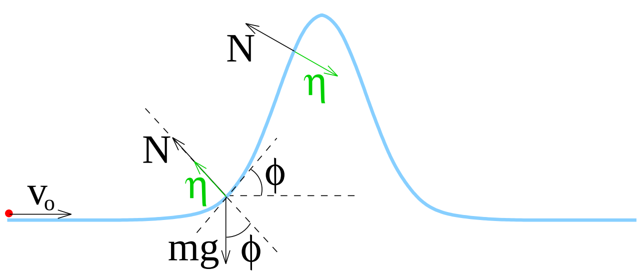


Στο σημείο $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ όμως που είναι σημείο καμπής η καμπύλη είναι τοπικά ευθεία και $R = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι η επαφή του σώματος με το δρόμο χάνεται στο σημείο A με $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$.
(Μετά το σημείο αυτό το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, οπότε δε θα ξανασυναντήσει ποτέ το δρόμο.)

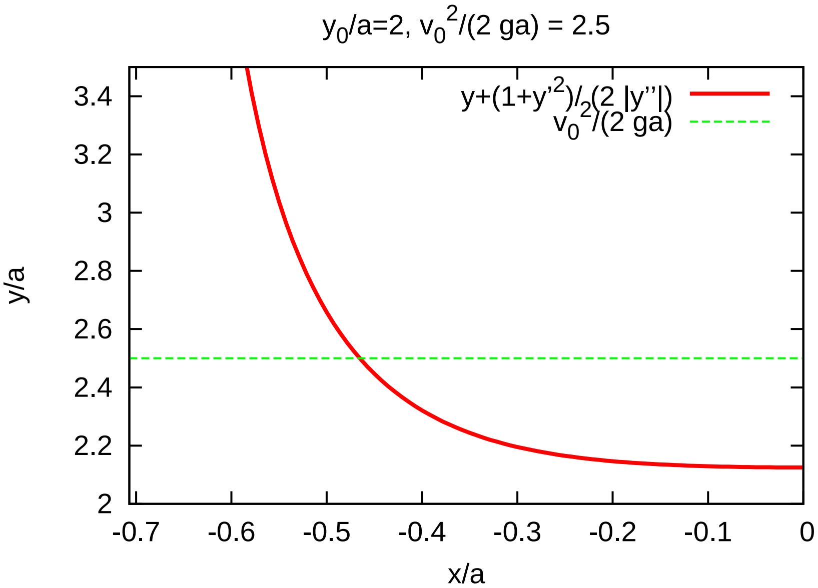
Το αποτέλεσμα ότι $N > 0$ όσο $y'' > 0$ γίνεται εποπτικά αντιληπτό αν σκεφτούμε ότι η καμπύλη $y = y_0 e^{-(x/a)^2}$ είναι η επιφάνεια ενός «τοίχου» που στέκει πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο (αφού βαρύτητα δεν υπάρχει το πρόβλημα δεν αλλάζει), βλέπε το δίπλα σχήμα. Αν εκτοξεύσουμε ένα σώμα ώστε η τροχιά του αρχικά να είναι εφαπτόμενη του τοίχου, αυτή θα ακολουθεί τον τοίχο όσο βρίσκει εμπόδιο μπροστά, δηλ. όσο $y'' > 0$.



(β) Για $x < -\frac{a}{\sqrt{2}}$ οπότε το μοναδιαίο $\hat{\eta}$ προς το κέντρο καμπυλότητας είναι ομόρροπο με τη δύναμη N ο νόμος του Νεύτωνα στη διεύθυνση $\hat{\eta}$ δίνει $N - mg\cos\phi = mv^2/R$, όπου R η ακτίνα καμπυλότητας και η γωνία $\phi = \arctan y'$, βλέπε δίπλα σχήμα. Συνεπώς η δύναμη N είναι κατά $mg\cos\phi$ μαγαλύτερη από την αντίστοιχη στο πρόβλημα χωρίς βαρύτητα και δε μηδενίζεται στην περιοχή πριν το σημείο A (δηλ. για $x < -\frac{a}{\sqrt{2}}$). Ούτε στο σημείο A μηδενίζεται (στο σημείο αυτό $R = \infty$ και άρα $N = mg\cos\phi > 0$.



Μετά το σημείο A, στη περιοχή $-\dfrac{a}{\sqrt{2}} < x \leq 0$, υπάρχει περίπτωση να γίνει $N = 0$, αρκεί η ταχύτητα v_0 να είναι αρκούντως μεγάλη. Πράγματι, με $\dfrac{1}{R} = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$, $\tan\phi = y'$ και $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = -mgy \Leftrightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$ ο νόμος του Νεύτωνα στη διεύθυνση $\hat{\eta}$ δίνει $mg\cos\phi - N = \dfrac{mv^2}{R} \Leftrightarrow N = \dfrac{mg}{(1+y'^2)^{1/2}} - \dfrac{m(v_0^2-2gy)|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \dfrac{2mg|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\left(y + \dfrac{1+y'^2}{2|y''|} - \dfrac{v_0^2}{2g}\right)$. Άρα $N > 0$ όσο $y + \dfrac{1+y'^2}{2|y''|} > \dfrac{v_0^2}{2g} \Leftrightarrow \dfrac{1+4\frac{y_0^2}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)e^{-2(x/a)^2}}{8\frac{y_0}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{a^2}\right)e^{-(x/a)^2}} > \dfrac{v_0^2}{2ga}$. Για παράδειγμα, το επόμενο σχήμα δίνει τη λύση για την περίπτωση που $\dfrac{y_0}{a} = 2$ και $\dfrac{v_0^2}{2ga} = 2.5$. Είναι $N > 0$ όσο $\dfrac{x}{a} < -0.465$. Στο $x = -0.465\, a$ χάνεται η επαφή με το δρόμο.



Η συνάρτηση $y + \dfrac{1+y'^2}{2|y''|}$ είναι φθείνουσα στο διάστημα $-\dfrac{a}{\sqrt{2}} < x < 0$. Ξεκινά από $+\infty$ στο $x = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ και αποκτά την ελάχιστη τιμή της στο $x = 0$. Η ελάχιστη αυτή τιμή είναι $\dfrac{1+4y_0^2/a^2}{4y_0/a}$. Αν η ταχύτητα v_0 είναι τέτοια ώστε το $\dfrac{v_0^2}{2ga} > \dfrac{1+4y_0^2/a^2}{4y_0/a} \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{ga\dfrac{1+4y_0^2/a^2}{2y_0/a}}$, τότε υπάρχει σημείο στο διάστημα $-\dfrac{a}{\sqrt{2}} < x \leq 0$ όπου γίνεται $y + \dfrac{1+y'^2}{2|y''|} = \dfrac{v_0^2}{2ga}$ και άρα το σώμα χάνει την επαφή με το δρόμο.
(Σημειώστε ότι αν ισχύει $v_0 > \sqrt{ga\dfrac{1+4y_0^2/a^2}{2y_0/a}}$ τότε ισχύει και $v_0 > \sqrt{2gy_0} \geq \sqrt{2gy}$ (αφού $\dfrac{1+4y_0^2/a^2}{2y_0/a} > \dfrac{2y_0}{a}$), δηλ. η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι αρκετή για να ανέβει μέχρι το σημείο που χάνεται η επαφή.)