$\boxed{1}$:

Σώμα μάζας m κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -\frac{k}{|x|^n}\hat{x}$, όπου k θετική σταθερά. Το χρόνο $t = 0$ το σώμα είναι ακίνητο, $\dot{x}(t = 0) = 0$, στη θέση $x(t = 0) = a > 0$. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο σημείο $x = 0$, αν η τιμή του εκθέτη n είναι

(α) $n = -1$,
(β) $n = 0$,
(γ) $n = 1/3$,
(δ) $n = 1$,
(ε) $n = 2$,
(στ) $n = 3$,
(ζ) $n \gg 1$.
(Δώστε απάντηση σε τρεις από τις παραπάνω περιπτώσεις.)

$\boxed{2}$:

Σώμα μάζας m κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ. Αν υπάρχει τριβή ολίσθησης με συντελεστή f, αλλά και αντίσταση αέρα η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος και ανάλογη της επιφάνειάς του, μελετήστε την κίνηση, δηλαδή βρείτε τις συναρτήσεις $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$. Υποθέστε ότι $x'Ox$ είναι άξονας πάνω στην κίνηση και $x(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$.

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις $x(t)$, $v(t)$ που βρήκατε, δείξτε ότι στο όριο που η αντίσταση του αέρα μηδενίζεται η κίνηση γίνεται ομαλά επιταχυνόμενη με τις εκφράσεις των $x(t)$, $v(t)$ να αποκτούν τη γνωστή μορφή.

Έστω ότι δύο κυβικά σώματα με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$ ξεκινούν από το ίδιο σημείο και κινούνται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν οι επιφάνειες των σωμάτων είναι S_1 και $S_2 = 4S_1$, ποιό σώμα θα κινηθεί πιο γρήγορα; Σχεδιάστε τα διαγράμματα $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ για τα δύο σώματα.

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

Μας ενδιαφέρει η κίνηση για $x \geq 0$, οπότε $|x| = x$ και $\vec{F} = F(x)\hat{x}$ με $F(x) = -k/x^n$. Η δύναμη αυτή είναι συντηρητική και η δυναμική ενέργεια είναι

$$V(x) = -\int F(x)dx = -k\int x^{-n}dx = \begin{cases} \dfrac{k}{1-n}x^{1-n}\,, \text{ για } n \neq 1\,, \\ k\ln x\,, \text{ για } n = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης μηδέν.)

Η διατήρηση ενέργειας γράφεται $mv^2/2 + V(x) = E$ και μπορεί να λυθεί ως προς την ταχύτητα $v = \pm\sqrt{(2/m)[E - V(x)]}$. Κατά τη διάρκεια της κίνησης από το $x = a$ στο $x = 0$ η ταχύτητα έχει φορά αντίθετη του $\hat{x}$ και άρα έχει αρνητική αλγεβρική τιμή. Επομένως η δεκτή λύση είναι μόνο η $v = -\sqrt{(2/m)[E - V(x)]}$. Η ενέργεια E μπορεί να υπολογιστεί στο σημείο $x = a$. Αφού στο σημείο αυτό το σώμα είναι ακίνητο είναι $E = 0 + V|_{x=a} \Leftrightarrow E = V(a)$. Γράφοντας $v = dx/dt$ και αντικαθιστώντας $E = V(a)$ έχουμε από τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left[V(a) - V(x)\right]} \Leftrightarrow \int_0^{t_0} dt = \int_a^0 \frac{-dx}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left[V(a) - V(x)\right]}} \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{V(a) - V(x)}}\,, \tag{2}$$

όπου ολοκληρώσαμε από $t = 0$ με αντίστοιχη θέση $x = a$, ως $t = t_0$ με αντίστοιχη θέση $x = 0$.

Αντικαθιστώντας τη δυναμική ενέργεια από τη σχέση (1), η σχέση (2) που δίνει το ζητούμενο χρόνο γίνεται

$$t_0 = \sqrt{\frac{m(1-n)}{2k}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^{1-n} - x^{1-n}}}\,, \text{ για } n < 1\,, \tag{3}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\ln a - \ln x}}\,, \text{ για } n = 1\,, \tag{4}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{m(n-1)}{2k}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{x^{n-1}} - \dfrac{1}{a^{n-1}}}}\,, \text{ για } n > 1\,. \tag{5}$$

Για $n < 1$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (3) απλουστεύεται με την αντικατάσταση $x = a\,(\sin\phi)^{\frac{2}{1-n}}$, $dx = \dfrac{2a}{1-n}\,(\sin\phi)^{\frac{1+n}{1-n}}\cos\phi d\phi$, $\sqrt{a^{1-n} - x^{1-n}} = a^{\frac{1-n}{2}}\cos\phi$, άρα

$$t_0 = \sqrt{\frac{2ma^{n+1}}{k(1-n)}}\int_0^{\pi/2}(\sin\phi)^{\frac{1+n}{1-n}}\,d\phi\,, \text{ για } n < 1\,. \tag{6}$$

(α) Για $n = -1$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (6) γίνεται $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{2}$, άρα $\boxed{t_0 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}\,, \text{ για } n = -1}$.

(Αλλιώς: Για $n = -1$ η δύναμη είναι $\vec{F} = -k|x|\hat{x}$, η οποία για $x \geq 0$ γίνεται η δύναμη ελατηρίου $\vec{F} = -kx\hat{x}$, υπό την επίδραση της οποίας το σώμα εκτελεί ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$.[1]

[1] Αυτό προκύπτει από $m\ddot{x} = -kx \overset{\omega^2 \equiv k/m}{\Longleftrightarrow} \ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Η εξίσωση είναι γραμμική και ομογενής και δέχεται λύσεις $e^{\pm i\omega t}$.

Επομένως η περίοδος είναι $T = 2\pi/\omega$. Βέβαια το σώμα δεν κάνει πλήρη ταλάντωση αφού μόλις περάσει στη περιοχή $x < 0$ η δύναμη γίνεται $\vec{F} = kx\hat{x}$, όμως η κίνηση μέχρι το σημείο $x = 0$ είναι το ένα τέταρτο της πλήρους ταλάντωσης άσχετα με το τι ακολουθεί. Επομένως $t_0 = T/4 = (\pi/2)\sqrt{k/m}$.)

(β) Για $n = 0$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (6) γίνεται $\int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi/2} = 1$, άρα $\boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2ma}{k}}\,,\ \text{για } n = 0}$.

(Αλλιώς: Για $n = 0$ η δύναμη είναι σταθερή $\vec{F} = -k\hat{x}$, δηλ. η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Η λύση της $m\ddot{x} = -k$ είναι $x = -(k/m)(t^2/2) + C_1 t + C_2$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες ($x|_{t=0} = a$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$) βρίσκουμε $x = a - (k/m)(t^2/2)$, επομένως η θέση γίνεται $x = 0$ για $t_0 = \sqrt{2ma/k}$.)

(γ) Για $n = 1/3$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (6) γίνεται $\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi d\phi = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\phi)}{2} d\phi = \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$, άρα $\boxed{t_0 = \frac{\pi}{4} a^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3m}{k}}\,,\ \text{για } n = \frac{1}{3}}$.

(δ) Για $n = 1$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (4) απλουστεύεται με την αντικατάσταση $x = ae^{-\xi^2}$, $dx = -2a\xi e^{-\xi^2} d\xi$, $\sqrt{\ln a - \ln x} = \xi$, άρα $t_0 = \sqrt{\frac{2ma^2}{k}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi \Leftrightarrow \boxed{t_0 = \sqrt{\frac{ma^2\pi}{2k}}\,,\ \text{για } n = 1}$, όπου αντικαταστήσαμε[2] $\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Για $n > 1$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (5) απλουστεύεται με την αντικατάσταση $x = a\,(\sin\phi)^{\frac{2}{n-1}}$, $dx = \frac{2a}{n-1} (\sin\phi)^{\frac{3-n}{n-1}} \cos\phi d\phi$, $\sqrt{\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}} = \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} \tan\phi}$, άρα

$$t_0 = \sqrt{\frac{2ma^{n+1}}{k(n-1)}} \int_0^{\pi/2} (\sin\phi)^{\frac{2}{n-1}}\, d\phi\,,\ \text{για } n > 1\,. \qquad (7)$$

(ε) Για $n = 2$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (7) γίνεται $\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi d\phi = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\phi)}{2} d\phi = \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$, άρα $\boxed{t_0 = \frac{\pi}{4} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2m}{k}}\,,\ \text{για } n = 2}$.

(στ) Για $n = 3$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (7) γίνεται $\int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi/2} = 1$, άρα

Άρα $x = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t}$ ή (χρησιμοποιώντας $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$) $x = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$, οπότε $\omega = \sqrt{k/m}$ είναι η κυκλική συχνότητα, η οποία συνδέεται με την περίοδο T με τη σχέση $\omega T = 2\pi$.
Θα μπορούσαμε να βρούμε τον χρόνο t_0 συνεχίζοντας τη μελέτη της κίνησης: Από τη σχέση $x = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$, $\dot{x} = -C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)$ και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες ($x|_{t=0} = a$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$) βρίσκουμε $x = a\cos(\omega t)$. Η θέση γίνεται $x = 0$ για $\cos(\omega t_0) = 0$. Η μικρότερη θετική λύση είναι $\omega t_0 = \pi/2 \Leftrightarrow t_0 = (\pi/2)\sqrt{k/m}$.

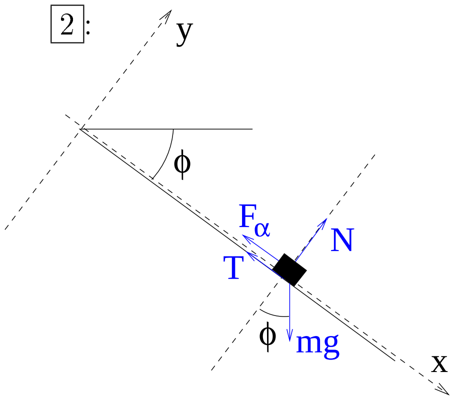
[2] Με χρήση της συνάρτησης Γ που γράφεται $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \overset{t=\xi^2}{=} 2\int_0^\infty \xi^{2z-1} e^{-\xi^2} d\xi$, βρίσκουμε $\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, διότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Ένας άλλος τρόπος να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi$ είναι να το γράψουμε σαν $\sqrt{\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\xi^2+\eta^2)} d\xi d\eta}$, το οποίο με αλλαγή συντεταγμένων $\xi = r\cos\phi$, $\eta = r\sin\phi$, $d\xi d\eta = r dr d\phi$ δίνει $\sqrt{\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr} = \sqrt{[\phi]_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\boxed{t_0 = a^2\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\ \text{για } n=3}$.

(ζ) Για $n \gg 1$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (7) γίνεται $\int_0^{\pi/2} (\sin\phi)^{\frac{2}{n-1}}\,d\phi \approx \int_0^{\pi/2} d\phi = [\phi]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$, και άρα [με $a^{n+1}/(n-1) \approx a^n/n$] βρίσκουμε $\boxed{t_0 \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2ma^n}{kn}}\,,\ \text{για } n \gg 1}$.

Όταν $n \to \infty$ είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\ln a}}{n} \overset{\text{l'Hôpital}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} e^{n\ln a}\ln a = \infty$ και άρα $t_0 \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, όπως περιμένουμε αν σκεφτούμε ότι για $n \to \infty$ η δύναμη μηδενίζεται.

$\boxed{2}$:



Στον άξονα y δεν υπάρχει κίνηση, άρα $N = mg\cos\phi$. Επομένως η τριβή είναι $T = fN = fmg\cos\phi$.
Η αντίσταση του αέρα έχει μέτρο ανάλογο της ταχύτητας και ανάλογο της επιφάνειας S. Άρα μπορούμε να γράψουμε $F_a = bSv$ (ή διανυσματικά $\vec{F}_a = -bS\vec{v}$), όπου b είναι η θετική σταθερά της αναλογίας.
Επομένως στον άξονα x η συνισταμένη των δυνάμεων είναι $mg\sin\phi - T - F_a = mg\sin\phi - fmg\cos\phi - bSv$ και ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = mg(\sin\phi - f\cos\phi) - bSv \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{bS}{m}v = g(\sin\phi - f\cos\phi)\,. \tag{1}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική, μη ομογενής. Η λύση της είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς[3] $Ce^{-(bS/m)t}$ με τη μερική λύση[4] $\frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)$. Άρα $v = Ce^{-(bS/m)t} + \frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)$. Από την αρχική συνθήκη $v|_{t=0} = 0$ προκύπτει $C = -\frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)$. Έτσι η ταχύτητα είναι

$$\boxed{v = \frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)}\,. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση $dx = vdt \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \int_0^x dx = \int_0^t \frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)dt \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = \frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)\left[t - \frac{m}{bS}\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)\right]}\,. \tag{3}$$

(Θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει την σχέση 1 σαν $\ddot{x} + (bS/m)\dot{x} = g(\sin\phi - f\cos\phi)$ και να βρούμε τη λύση της σαν άθροισμα της λύσης της ομογενούς $C_1 + C_2e^{-(bS/m)t}$ με μια μερική λύση $\frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)t$.)
Παραγωγίζοντας την σχέση (2) βρίσκουμε τη επιτάχυνση

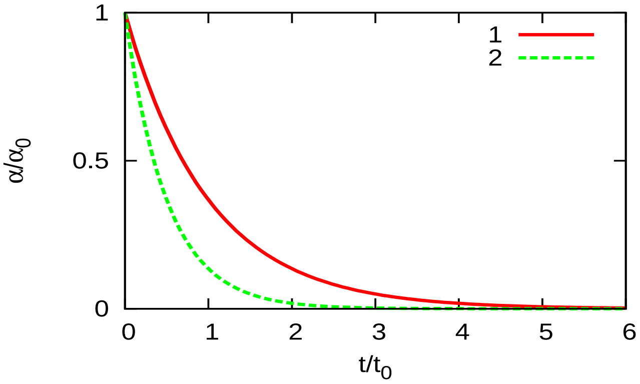
$$\boxed{a = g(\sin\phi - f\cos\phi)e^{-\frac{bS}{m}t}}\,. \tag{4}$$

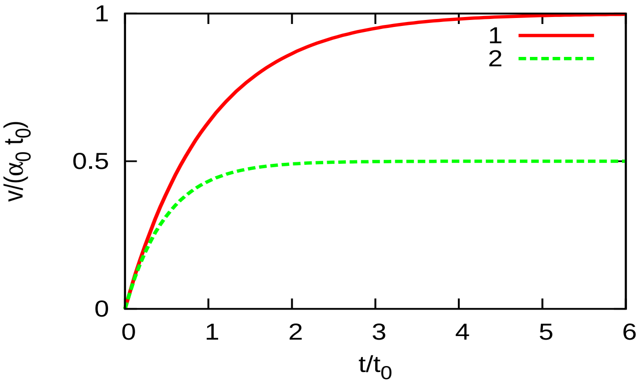
Στην περίπτωση που δεν υπάρχει αντίσταση αέρα, η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $a = g(\sin\phi - f\cos\phi)$, ταχύτητα $v = v|_{t=0} + at = g(\sin\phi - f\cos\phi)t$ και θέση $x = x|_{t=0} + v|_{t=0}t + at^2/2 =$

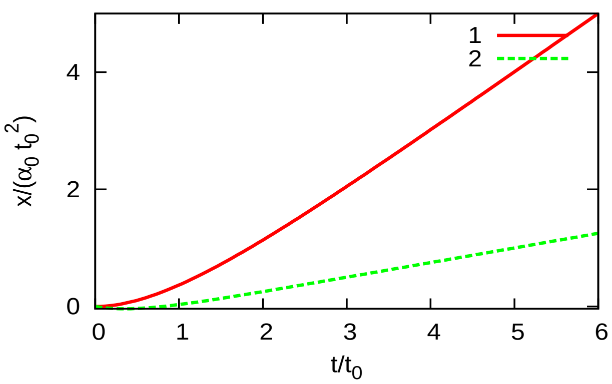
[3]Η εξίσωση $\frac{dv}{dt} + \frac{bS}{m}v = 0$ δέχεται λύση $e^{\lambda t}$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε $\lambda + \frac{bS}{m} = 0$, δηλαδή $\lambda = -\frac{bS}{m}$.

[4]Παρατηρούμε ότι μια μερική λύση είναι μια σταθερά D. Αντικαθιστώντας προκύπτει $0 + \frac{bS}{m}D = g(\sin\phi - f\cos\phi)$, δηλαδή $D = \frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)$.

$g(\sin\phi - f\cos\phi)t^2/2$. Πράγματι αυτή είναι η μορφή που παίρνουν οι σχέσεις (2)–(4) στο όριο $b \to 0$. Συγκεκριμένα:
Η σχέση (4) δίνει $\lim\limits_{b\to 0}\left[g(\sin\phi - f\cos\phi)e^{-\frac{bS}{m}t}\right] = g(\sin\phi - f\cos\phi)$.
Η σχέση (2) δίνει $\lim\limits_{b\to 0}\left[\frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)\right] = \frac{mg}{S}(\sin\phi - f\cos\phi)\lim\limits_{b\to 0}\frac{1 - e^{-\frac{bS}{m}t}}{b} \overset{\text{l'Hôpital}}{=\!=} g(\sin\phi - f\cos\phi)t$.
Η σχέση (3) δίνει $\lim\limits_{b\to 0}\frac{mg}{bS}(\sin\phi - f\cos\phi)\left[t - \frac{m}{bS}\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)\right] = \frac{mg}{S}(\sin\phi - f\cos\phi)\lim\limits_{b\to 0}\frac{bt - \frac{m}{S}\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)}{b^2}$ $\overset{\text{l'Hôpital}}{=\!=} \frac{mg}{S}(\sin\phi - f\cos\phi)\lim\limits_{b\to 0}\frac{t - te^{-\frac{bS}{m}t}}{2b} \overset{\text{l'Hôpital}}{=\!=} g(\sin\phi - f\cos\phi)t^2/2$.
(Τα παραπάνω όρια μπορούν να βρεθούν και με τη χρήση αναπτυγμάτων ως προς b γύρω από την τιμή $b = 0$· για παράδειγμα το όριο $\lim\limits_{b\to 0}\frac{bt - \frac{m}{S}\left(1 - e^{-\frac{bS}{m}t}\right)}{b^2}$ βρίσκεται αν αναπτύξουμε το $e^{-\frac{bS}{m}t} \approx 1 - \frac{bS}{m}t + \frac{1}{2}\frac{b^2S^2}{m^2}t^2$.)







Έστω έχουμε δύο σώματα με μάζες m_1, $m_2 = 2m_1$ και επιφάνειες S_1, $S_2 = 4S_1$. Θέτοντας $m_1/(bS_1) = t_0$ και $a_0 = g(\sin\phi - f\cos\phi)$, έχουμε για το σώμα μάζας m_1 (από τις σχέσεις 2–4)

$$a_1 = a_0 e^{-\frac{t}{t_0}}\,,$$
$$v_1 = a_0 t_0\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right)\,,$$
$$x_1 = a_0 t_0^2\left(\frac{t}{t_0} - 1 + e^{-\frac{t}{t_0}}\right)\,.$$

Όμοια για το δεύτερο σώμα μάζας m_2, για το οποίο $m_2/(bS_2) = m_1/(2bS_1) = t_0/2$ έχουμε (από τις σχέσεις 2–4)

$$a_2 = a_0 e^{-2\frac{t}{t_0}}\,,$$
$$v_2 = \frac{a_0 t_0}{2}\left(1 - e^{-2\frac{t}{t_0}}\right)\,,$$
$$x_2 = \frac{a_0 t_0^2}{4}\left(\frac{t}{t_0} - 1 + e^{-2\frac{t}{t_0}}\right)\,.$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση του δεύτερου σώματος μειώνεται γρηγορότερα. Αφού η επιτάχυνση του πρώτου σώματος είναι μεγαλύτερη, η ταχύτητά του αυξάνει πιο γρήγορα. Η οριακή τιμή της v_1 είναι a_0t_0, διπλάσια από την οριακή τιμή της v_2 (η οποία είναι $a_0t_0/2$). Αφού η ταχύτητα του πρώτου σώματος είναι μεγαλύτερη, η θέση του αυξάνει πιο γρήγορα.