$\boxed{1}$:

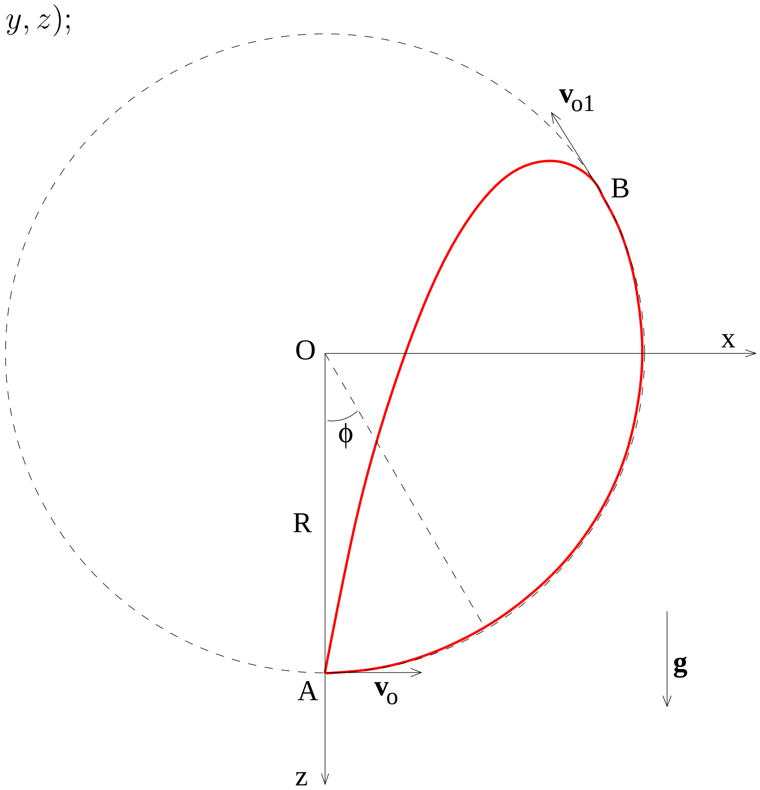
Έστω δύναμη $\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\,\hat{x} + \lambda xyz^3\hat{y} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,\hat{z}$, όπου λ σταθερά (όλα τα μεγέθη στο σύστημα μονάδων SI).

(α) Ποιό το έργο της $\vec{F}$ για μια κλειστή διαδρομή σχήματος τετραγώνου με κορυφές τα $\mathrm{A}(0,0,1)$, $\mathrm{B}(1,0,1)$, $\Gamma(1,1,1)$, $\Delta(0,1,1)$ και φορά κίνησης Α→Β→Γ→Δ→Α;

(β) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς λ ίσως η $\vec{F}$ να είναι συντηρητική.
Για αυτή τη τιμή του λ είναι πράγματι συντηρητική;
Αν ναι, ποιά η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$;

$\boxed{2}$:

Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους R. Το άλλο άκρο του νήματος Ο είναι σταθερό. Στο σημείο Α (κατώτερο) δίνουμε οριζόντια ταχύτητα $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$.
Δείξτε ότι όταν το σώμα βρεθεί στη θέση $\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (όπου ϕ η γωνία από την κατακόρυφο, βλέπε σχήμα), δηλ. όταν $x = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ και $z = -\frac{1}{2}R$, το νήμα παύει να είναι τεντωμένο και η ταχύτητα του σώματος είναι $\vec{v}_{01} = \sqrt{\frac{gR}{2}}\left(-\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\right)$.
Μελετήστε τη κίνηση μετά το σημείο αυτό και δείξτε ότι το σώμα περνά από το σημείο εκκίνησης ($x = 0$, $z = R$).



ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

(α)

$$W_{\text{ΑΒΓΔΑ}} = W_{\text{ΑΒ}} + W_{\text{ΒΓ}} + W_{\text{ΓΔ}} + W_{\text{ΔΑ}} \tag{1}$$

Κάθε έργο υπολογίζεται από

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{s_1}^{s_2}\left(F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds} + F_z\frac{dz}{ds}\right) ds \Leftrightarrow$$

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2}\left[(y^2z^3 - 6xz^2)\frac{dx}{ds} + \lambda xyz^3\frac{dy}{ds} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\frac{dz}{ds}\right] ds\,, \tag{2}$$

όπου $[x = x(s)\,, y = y(s)\,, z = z(s)]$ είναι η εξίσωση της τροχιάς (s είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή).

Για τη διαδρομή Α → Β μπορούμε να διαλέξουμε $s = x$, οπότε $(x = s\,, y = 0\,, z = 1)$. Αντικαθιστώντας στον τύπο (2) βρίσκουμε

$$W_{\text{ΑΒ}} = \int_0^1 [(-6s) + 0 + 0]\, ds = \left[-3s^2\right]_0^1 = -3\,. \tag{3}$$

Για τη διαδρομή Β → Γ μπορούμε να διαλέξουμε $s = y$, οπότε $(x = 1\,, y = s\,, z = 1)$. Αντικαθιστώντας στον τύπο (2) βρίσκουμε

$$W_{\text{ΒΓ}} = \int_0^1 (0 + \lambda s + 0)\, ds = \left[\frac{\lambda s^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\lambda}{2}\,. \tag{4}$$

Για τη διαδρομή Γ → Δ μπορούμε να διαλέξουμε $s = x$, οπότε $(x = s\,, y = 1\,, z = 1)$. Αντικαθιστώντας στον τύπο (2) βρίσκουμε

$$W_{\text{ΓΔ}} = \int_1^0 [(1 - 6s) + 0 + 0]\, ds = \left[s - 3s^2\right]_1^0 = 2\,. \tag{5}$$

Για τη διαδρομή Δ → Α μπορούμε να διαλέξουμε $s = y$, οπότε $(x = 0\,, y = s\,, z = 1)$. Αντικαθιστώντας στον τύπο (2) βρίσκουμε

$$W_{\text{ΔΑ}} = \int_1^0 (0 + 0 + 0)\, ds = 0\,. \tag{6}$$

Συνολικά, αντικαθιστώντας τα επιμέρους έργα (3–6) στη σχέση (1) βρίσκουμε

$$\boxed{W_{\text{ΑΒΓΔΑ}} = \frac{\lambda}{2} - 1}\,. \tag{7}$$

(β) Αν η $\vec{F}$ είναι συντηρητική, το έργο της για κάθε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Άρα και για την κλειστή διαδρομή του ερωτήματος (α) πρέπει να είναι $W_{\text{ΑΒΓΔΑ}} = 0 \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \boxed{\lambda = 2}$.

Το προηγούμενο είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική (αφού δεν έχουμε ελέγξει ότι το έργο της $\vec{F}$ μηδενίζεται σε κάθε κλειστή διαδρομή παρά μόνο σε μία). Για να είναι συντηρητική πρέπει να υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x\,, y\,, z)$ τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right)\,,$$

της οποίας οι τρεις συνιστώσες είναι

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y^2 z^3 + 6xz^2\,, \tag{8}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\lambda xyz^3\,, \tag{9}$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = -3xy^2 z^2 + 6x^2 z\,. \tag{10}$$

Η εξίσωση (8) ολοκληρώνεται και δίνει $V(x\,,y\,,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + c(y\,,z)$, όπου η ολοκλήρωση έγινε ως προς x κρατώντας σταθερά τα y, z. Η «σταθερά» ολοκλήρωησης είναι μια ελεύθερη συνάρτηση των y και z.
Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση (10) βρίσκουμε $\partial c/\partial z = 0$. Άρα η συνάρτηση c δεν εξαρτάται από το z και η δυνάμική ενέργεια είναι $V(x\,,y\,,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + c(y)$.
Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση (9) βρίσκουμε $dc/dy = (2-\lambda)xyz^3$. Για $\lambda = 2$ η σχέση αυτή ικανοποιείται (μάλιστα ικανοποιείται μόνο για αυτή τη τιμή της σταθεράς λ) και βρίσκουμε ότι η c είναι σταθερά. Το τελικό αποτέλεσμα είναι $\boxed{V(x\,,y\,,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + c}$, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

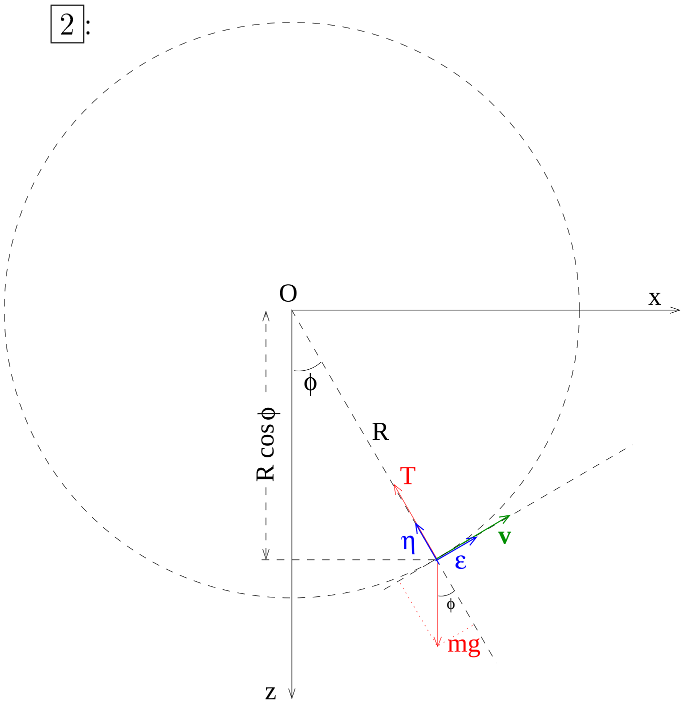
(Το αν η $\vec{F}$ είναι συντηρητική θα μπορούσε να ελεγχθεί μέσω του στροβιλισμού της. Πράγματι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & \lambda xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} = -3(\lambda-2)xyz^2\hat{x} + (\lambda-2)yz^3\hat{z}\,,$$

και είναι $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ μόνο αν $\lambda = 2$. Αν ακολουθούσαμε αυτό τον τρόπο, στη συνέχεια θα έπρεπε να βρούμε την συνάρτηση V από τη σχέση $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ όπως παραπάνω. Η μόνη διαφορά είνα ότι τώρα γνωρίζουμε ότι υπάρχει σίγουρα λύση, αφού ο στροβιλισμός της $\vec{F}$ μηδενίζεται. Αυτός ο έλεγχος μπορεί να παραληφθεί, αφού η ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ είναι ταυτόχρονα και απόδειξη ότι η δύναμη είναι συντηρητική.)

(Στην περίπτωση που έχουμε ελέγξει ότι ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ και άρα η $\vec{F}$ είναι συντηρητική, υπάρχει και ο ακόλουθος τρόπος εύρεσης της δυναμικής ενέργειας: Γνωρίζουμε ότι $dV = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$ και επομένως $V(x\,,y\,,z) - V(x_0\,,y_0\,,z_0) = -\int_{(x_0\,,y_0\,,z_0)}^{(x\,,y\,,z)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $(x\,,y\,,z)$ είναι ένα τυχαίο σημείο και $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ ένα σημείο αναφοράς. Η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ εγγυάται ότι το προηγούμενο ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά μόνο από τα ακραία σημεία. Μπορούμε να διαλέξουμε σα σημείο αναφοράς το $(0\,,0\,,0)$ και σαν βολική διαδρομή από το $(0\,,0\,,0)$ στο $(x\,,y\,,z)$ τη τεθλασμένη που αποτελείται από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα $(0\,,0\,,0) \to (x\,,0\,,0) \to (x\,,y\,,0) \to (x\,,y\,,z)$. Για το πρώτο τμήμα είναι $x = s\,, y = 0\,, z = 0$ και τα όρια ολοκλήρωσης στον τύπο (2) είναι $s_1 = 0$, $s_2 = x$. Το έργο είναι $\int_{(0\,,0\,,0)}^{(x\,,0\,,0)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. Για το δεύτερο τμήμα είναι $x =$ σταθερό, $y = s\,, z = 0$ και τα όρια ολοκλήρωσης στον τύπο (2) είναι $s_1 = 0$, $s_2 = y$. Το έργο είναι $\int_{(x\,,0\,,0)}^{(x\,,y\,,0)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. Για το τρίτο τμήμα είναι $x =$ σταθερό, $y =$ σταθερό, $z = s$ και τα όρια ολοκλήρωσης στον τύπο (2) είναι $s_1 = 0$, $s_2 = z$. Το έργο είναι $\int_{(x\,,y\,,0)}^{(x\,,y\,,z)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^z \left(3xy^2s^2 - 6x^2s\right)ds = xy^2z^3 - 3x^2z^2$. Συνολικά λοιπόν $V(x\,,y\,,z) = V(0\,,0\,,0) - \int_{(x_0\,,y_0\,,z_0)}^{(x\,,y\,,z)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = V(0\,,0\,,0) - xy^2z^3 + 3x^2z^2$, και μπορούμε να διαλέξουμε αυθαίρετα την τιμή του $V(0\,,0\,,0)$.)

$\boxed{2}$:



Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα μάζας m στην τυχαία θέση του σχήματος είναι $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ όπου T η τάση του νήματος. Ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$. Αναλύοντας την προηγούμενη διανυσματική σχέση στις διευθύνσεις $\hat{\eta}$, $\hat{\varepsilon}$ και χρησιμοποιώντας την έκφραση $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\hat{\eta} + \dot{v}\hat{\varepsilon}$ για την επιτάχυνση έχουμε

$$\frac{mv^2}{R} = T - mg\cos\phi\,, \tag{1}$$

$$m\dot{v} = -mg\sin\phi\,. \tag{2}$$

Η σχέση (1) δίνει την τάση του νήματος T αν ξέρουμε την ταχύτητα. Η σχέση (2) είναι ισοδύναμη της διατήρησης ενέργειας μεταξύ του κατώτερου σημείου $\phi = 0$ όπου γνωρίζουμε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ και του τυχαίου σημείου ϕ.
Στο κατώτερο σημείο η ενέργεια είναι $mv_0^2/2 - mgR$, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το σημείο O. Στο τυχαίο σημείο ϕ η ενέργεια είναι $mv^2/2 - mgR\cos\phi$. Άρα[1]

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = \frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi \Leftrightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\phi)}\,. \tag{3}$$

(Η τελευταία σχέση μπορεί να προκύψει και από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας: Το έργο του βάρους για τη μετακίνηση από την κατώτερη θέση ως την τυχαία θέση $\phi = 0$ είναι $W_{mg} = -mgR(1 - \cos\phi)$, αφού η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $R - R\cos\phi$. Το έργο της τάσης του νήματος είναι μηδέν αφού η δύναμη αυτή είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση και άρα $\vec{T}\cdot d\vec{r} = 0$. Άρα $mv^2/2 - mv_0^2/2 = -mgR(1-\cos\phi)$.
Ένας ισοδύναμος τρόπος για να βρούμε την σχέση (3) είναι να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2): Με $v = R\dot{\phi} \Leftrightarrow \dot{\phi} = v/R$ μπορούμε να γράψουμε $\dot{v} = \dot{\phi}\; dv/d\phi = (v/R)\; dv/d\phi$, οπότε η εξίσωση (2) γράφεται

$$m\frac{v}{R}\frac{dv}{d\phi} = -mg\sin\phi \Leftrightarrow \int_{v_0}^{v} mvdv = -\int_0^{\phi} mgR\sin\phi\; d\phi \Leftrightarrow \left[\frac{mv^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = mgR\left[\cos\phi\right]_0^{\phi}\,,$$

οπότε καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση (3).)

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα από την εξίσωση (3), η εξίσωση (1) δίνει

$$T = \frac{mv_0^2}{R} + 3mg\cos\phi - 2mg\,. \tag{4}$$

Οι εξισώσεις (3), (4) περιγράφουν πλήρως τη κίνηση όσο το νήμα είναι τεντωμένο.

Αν $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$ η τάση σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ είναι $T = \frac{3}{2}mg + 3mg\cos\phi$. Το νήμα χαλαρώνει όταν

$$T = 0 \Leftrightarrow \cos\phi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}}\,.$$

[1] Το αποτέλεσμα δεν θα άλλαζε αν θεωρούσαμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το σημείο A. Τότε η ενέργεια στο A θα ήταν $mv_0^2/2$ και στο τυχαίο σημείο $mv^2/2 + mgR(1-\cos\phi)$.

Στο σημείο αυτό $x = R\sin\phi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}R}$ και $z = R\cos\phi \Leftrightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}R}$.
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3), το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο σημείο όπου το νήμα χαλαρώνει είναι $v_{01} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$. Το μοναδιαίο πάνω στην ταχύτητα είναι το $\hat{\varepsilon} = \cos\phi\hat{x} - \sin\phi\hat{z} = -\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}$. Άρα η ταχύτητα διανυσματικά γράφεται

$$\boxed{\vec{v}_{01} = \sqrt{\frac{gR}{2}}\left(-\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\right)}. \tag{5}$$

Μετά το σημείο αυτό, το νήμα είναι χαλαρό (μέχρι η απόσταση του σώματος από το κέντρο Ο να γίνει ξανά R) και η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος $m\vec{g} = mg\hat{z}$. Ο νόμος του Νεύτωνα $m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_z\hat{z} = g\hat{z}$ έχει λύση

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 \Leftrightarrow \int_{v_{x01}}^{v_x} dv_x = 0 \overset{(5)}{\Leftrightarrow} v_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}\,, \\ \dot{v}_z = g \Leftrightarrow \int_{v_{z01}}^{v_z} dv_z = \int_0^t g dt \overset{(5)}{\Leftrightarrow} v_z = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}} + gt\,, \end{cases}$$

όπου θεωρήσαμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι χρόνος 0 αντιστοιχεί στη θέση όπου το νήμα χαλαρώνει.
Ολοκληρώνοντας ξανά βρίσκουμε τη θέση σαν συνάρτηση του χρόνου

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}} \Leftrightarrow \int_{x_{01}}^{x} dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}\int_0^t dt \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}t\,, \\ \dot{z} = v_z = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}} + gt \Leftrightarrow \int_{z_{01}}^{z} dz = \int_0^t \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}} + gt\right) dt \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}R - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}t + \frac{gt^2}{2}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Όταν η τροχιά του σώματος τμήσει τον άξονα z είναι $x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}t = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{6R/g}$, οπότε $z = -\frac{1}{2}R - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}t + \frac{gt^2}{2} = R$. Αποδείχθηκε δηλαδή ότι το σώμα περνάει από το σημείο εκκίνησης $\boxed{(x = 0\,, z = R)}$.
(Ισοδύναμα, απαλείφοντας το χρόνο από τις σχέσεις 6 βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς που ακολουθεί το σώμα μετά το σημείο που το νήμα χαλαρώνει $z = R - 3\sqrt{3}\,x + 4x^2/R$. Για $x = 0$ προκύπτει $z = R$.)