$\boxed{1}$:

Έστω ότι γνωρίζουμε τη κίνηση υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες $r = r(t)$, $\phi = \phi(t)$. Να βρεθούν οι εκφράσεις των $\vec{v}$, $\vec{a}$ στη βάση $\hat{r}$, $\hat{\phi}$.

$\boxed{2}$:

Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R, με γωνιακή ταχύτητα $\frac{d\phi}{dt} = \omega(t)$, τέτοια ώστε η κεντρομόλος επιτάχυνση να είναι ανάλογη του τετραγώνου της επιτρόχιας επιτάχυνσης, $a_\kappa = \frac{t_0^2}{R} a_\varepsilon^2$, όπου $t_0 =$ σταθερά. Ποιά είναι η συνάρτηση $\omega(t)$;

$\boxed{3}$:

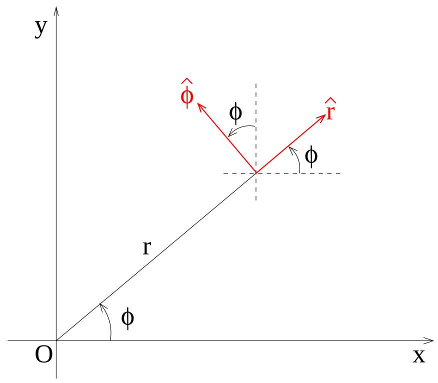
Σώμα έχει διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = \left(2t^3 - 3t^2\right)\hat{x} + \left(t^2 - \lambda t + 1\right)\hat{y} \quad (\text{στο σύστημα SI})\,.$$

(α) Ποιό το λ ώστε η ταχύτητα του σώματος να μηδενίζεται κάποια χρονική στιγμή; Ποιά αυτή η χρονική στιγμή;
(β) Σε ποιό χρόνο η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι παράλληλη στον άξονα y;

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:



Από το σχήμα έχουμε

$$\hat r = (\hat r\cdot\hat x)\hat x + (\hat r\cdot\hat y)\hat y = \cos\phi\,\hat x + \sin\phi\,\hat y\,, \tag{1}$$
$$\hat\phi = (\hat\phi\cdot\hat x)\hat x + (\hat\phi\cdot\hat y)\hat y = -\sin\phi\,\hat x + \cos\phi\,\hat y\,. \tag{2}$$

(Αλλιώς από $\hat r = \dfrac{\partial\vec r}{\partial r}\Big/\left|\dfrac{\partial\vec r}{\partial r}\right|$, $\hat\phi = \dfrac{\partial\vec r}{\partial\phi}\Big/\left|\dfrac{\partial\vec r}{\partial\phi}\right|$ με $\vec r = r\cos\phi\hat x + r\sin\phi\hat y$, ή από $\hat r = \vec\nabla r/|\vec\nabla r|$, $\hat\phi = \vec\nabla\phi/|\vec\nabla\phi|$ με $r = \sqrt{x^2+y^2}$ και $\phi = \arccos(x/\sqrt{x^2+y^2}) = \arcsin(y/\sqrt{x^2+y^2})$.)
Θα μας χρειαστούν και οι χρονικές παράγωγοι των μοναδιαίων

$$\dot{\hat r} = -\sin\phi\;\dot\phi\;\hat x + \cos\phi\;\dot\phi\;\hat y = \dot\phi\hat\phi\,, \tag{3}$$
$$\dot{\hat\phi} = -\cos\phi\;\dot\phi\;\hat x - \sin\phi\;\dot\phi\;\hat y = -\dot\phi\hat r\,. \tag{4}$$

Η θέση είναι

$$\vec r = r\hat r\,. \tag{5}$$

Η ταχύτητα είναι

$$\vec v = \dot{\vec r} \overset{(5)}{=} \frac{d}{dt}(r\hat r) = \dot r\hat r + r\dot{\hat r} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \boxed{\vec v = \dot r\hat r + r\dot\phi\hat\phi}\,. \tag{6}$$

(Αλλιώς: Η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec r$ στο επίπεδο, γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο $\vec r$, μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες πάνω στις διευθύνσεις $\hat r$ και $\hat\phi$. Η πρώτη αντιστοιχεί σε μεταβολή του r κατά dr, οπότε γράφεται $dr\hat r$. Η δεύτερη αντιστοιχεί σε μεταβολή του ϕ κατά $d\phi$. Το αντίστοιχο μήκος είναι τόξο στον κύκλο ακτίνας r που αντιστοιχεί σε γωνία $d\phi$. Άρα η αντίστοιχη μετατόπιση γράφεται διανυσματικά $rd\phi\hat\phi$. Συνολικά, $d\vec r = dr\hat r + rd\phi\hat\phi$. Διαιρώντας με dt βρίσκουμε $\vec v = \dot r\hat r + r\dot\phi\hat\phi$.)
Η επιτάχυνση είναι

$$\vec a = \dot{\vec v} \overset{(6)}{=} \frac{d}{dt}(\dot r\hat r + r\dot\phi\hat\phi) = \ddot r\hat r + \dot r\dot{\hat r} + \dot r\dot\phi\hat\phi + r\ddot\phi\hat\phi + r\dot\phi\dot{\hat\phi} \overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow} \boxed{\vec a = \left(\ddot r - r\dot\phi^2\right)\hat r + \left(r\ddot\phi + 2\dot r\dot\phi\right)\hat\phi}\,. \tag{7}$$

$\boxed{2}$:

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $a_\kappa = v^2/R$, ενώ η επιτρόχια $a_\varepsilon = \dot v$. Σε μια κυκλική κίνηση η απόσταση του σώματος από το κέντρο της τροχιάς είναι σταθερή, δηλ. σε πολικές συντεταγμένες με κέντρο το κέντρο της κυκλικής τροχιάς $r = R$ και $\dot r = 0$. Η γωνία ϕ είναι συνάρτηση του χρόνου και ο ρυθμός μεταβολής της ορίζει το μέγεθος της γωνιακής ταχύτητας $\omega = d\phi/dt$. Η γενική μορφή της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες με κέντρο το κέντρο της κυκλικής τροχιάς $\vec v = \dot r\hat r + r\dot\phi\hat\phi$, με $r = R$, $\dot r = 0$ και $\dot\phi = \omega$, γίνεται $\vec v = \omega R\hat\phi$ και το μέτρο της $v = \omega R$.

Οι εκφράσεις της κεντρομόλου και επιτρόχιας επιτάχυνσης σε κυκλική κίνηση, χρησιμοποιώντας την γωνιακή ταχύτητα $\omega = v/R$ αντί τη γραμμική ταχύτα v, είναι $a_\kappa = \omega^2 R$ και $a_\varepsilon = \dot\omega R$.

(Θα μπορούσαμε να βρούμε τις εκφράσεις των a_κ και a_ε χρησιμοποιώντας την έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες με κέντρο το κέντρο της κυκλικής τροχιάς $\vec a = \left(\ddot r - r\dot\phi^2\right)\hat r + \left(r\ddot\phi + 2\dot r\dot\phi\right)\hat\phi$. Πράγματι με $r = R$, $\dot r = 0$, $\ddot r = 0$, $\dot\phi = \omega$ και $\ddot\phi = \dot\omega$ η προηγούμενη σχέση γίνεται $\vec a = -R\omega^2\hat r + R\dot\omega\hat\phi$, ή $\vec a = R\omega^2\hat\eta + R\dot\omega\hat\varepsilon$, αφού για την συγκεκριμένη κίνηση το μοναδιαίο πάνω στην κίνηση είναι το $\hat\varepsilon = \hat\phi$ και προς το κέντρο καμπυλότητας το $\hat\eta = -\hat r$.)

Η δεδομένη σχέση $a_\kappa = (t_0^2/R)a_\varepsilon^2$ γίνεται

$$\omega^2 R = \frac{t_0^2}{R}(\dot{\omega}R)^2 \Leftrightarrow \frac{\dot{\omega}}{\omega} = \pm\frac{1}{t_0} \Leftrightarrow \int\frac{d\omega}{\omega} = \pm\int\frac{dt}{t_0} \Leftrightarrow \ln|\omega| - \ln|c| = \pm\frac{t}{t_0} \Leftrightarrow \boxed{\omega = ce^{\pm\frac{t}{t_0}}}.$$

(Η λύση θα μπορούσε να γραφεί και σαν $|\omega| = e^{c_1 \pm t/t_0}$. Είναι προτιμότερο όμως να γράψουμε το $|\omega| = e^{c_1 \pm t/t_0}$ σαν $|\omega| = e^{c_1}e^{\pm t/t_0}$ και αλλάζοντας το όνομα της σταθεράς να καταλήξουμε στη μορφή $\omega = ce^{\pm t/t_0}$. Στη τελευταία σχέση η σταθερά ολοκλήρωσης c εκφράζει την τιμή της ω για $t = 0$.)
(Μιας και η σχέση $a_\kappa = (t_0^2/R)a_\varepsilon^2$ δεν περιέχει το t_0 αλλά μόνο το τετράγωνό του, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το πρόσημο του t_0 να είναι το πρόσημο του $\dot{\omega}/\omega$, οπότε η λύση θα ήταν $\omega = ce^{t/t_0}$.)

$\boxed{3}$:
Η ταχύτητα είναι

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \left(6t^2 - 6t\right)\hat{x} + (2t - \lambda)\,\hat{y} \quad (\text{στο σύστημα SI}) \tag{1}$$

και η επιτάχυνση

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (12t - 6)\,\hat{x} + 2\hat{y} \quad (\text{στο σύστημα SI})\,. \tag{2}$$

(α) Η ταχύτητα μηδενίζεται αν και οι δυο συνιστώσες της μηδενίζονται (αυτό προκύπτει και από την απαίτηση $v = 0 \Leftrightarrow \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0$). Άρα

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} t(t-1) = 0 \\ \lambda = 2t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ \lambda = 0 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right\}}.$$

(β) Η δύναμη είναι παράλληλη στον άξονα y αν η $\hat{x}$ συνιστώσα της μηδενίζεται. Άρα

$$F_x = 0 \Leftrightarrow a_x = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \boxed{t = \frac{1}{2}}.$$

Αφού τα πάντα είναι στο σύστημα SI, οι χρόνοι που βρήκαμε και στα δυο ερωτήματα είναι σε s ενώ τα λ σε m s^{-1}.