Μηχανική Ι – Εργασία #7

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

---

1. Η δυναμική ενέργεια μιας απομονωμένης κατανομής μαζών που αλληλεπιδρούν βαρυτικά έχουμε δείξει ότι είναι $V = \frac{1}{2}\iiint \Phi\rho\, d\tau$.

(α) Χρησιμοποιώντας τον νόμο Gauss αποδείξτε την ισοδύναμη μορφή $V = -\frac{1}{8\pi G}\iiint g^2\, d\tau$ (όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται σε όλο το χώρο).
Υπόδειξη: $\Phi\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{g}) - \vec{g}\cdot\vec{\nabla}\Phi$.
Δίνεται ότι το ολοκλήρωμα της απόκλισης $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ σε κάποιο όγκο ισούται με το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα του $\vec{A}$ στο σύνορο του όγκου, δηλ. $\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{a}$ (θεώρημα απόκλισης).

(β) Για σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας δείξτε ότι ισχύει $V = -\int \frac{Gm(r)\, dm}{r}$, όπου $dm = \rho(r)\, 4\pi r^2 dr$ και $m(r) = \int_0^r \rho(r)\, 4\pi r^2 dr$ η μάζα από το κέντρο μέχρι την ακτίνα r.
Υπόδειξη: $[m(r)]^2\frac{dr}{r^2} = -d\frac{[m(r)]^2}{r} + 2\frac{m(r)}{r}dm$.

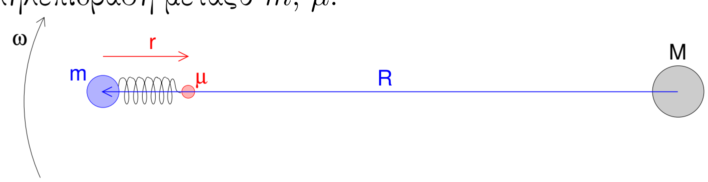
(γ) Ποια είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια μιας ομογενούς σφαίρας μάζας M και ακτίνας R;

---

2. Σφαίρα μάζας m_1 και ακτίνας R_1 έχει την μάζα της κατανεμημένη με σφαιρικά συμμετρικό τρόπο ως προς το κέντρο της. Μια δεύτερη σφαιρικά συμμετρική μάζα ως προς το κέντρο της, έχει μάζα m_2 και ακτίνα R_2. Έστω επιλέγουμε σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο της m_2, στο οποίο το κέντρο της m_1 βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_1$ (με $r_1 > R_1 + R_2$).
(α) Ποια η ένταση του πεδίου βαρύτητας $\vec{g}_1$ που δημιουργεί η m_1 σε θέση $\vec{r}$ στο εξωτερικό της;
(β) Ποια η ένταση του πεδίου βαρύτητας $\vec{g}_2(\vec{r}_1)$ που δημιουργεί η m_2 στο κέντρο της m_1;
(γ) Ποια η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκεί η m_1 στην m_2; (Αποδείξτε ότι είναι ίση με την δύναμη που θα ασκούνταν αν οι μάζες των σφαιρών ήταν συγκεντρωμένες στα κέντρα τους.)
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα που δίνει την $\vec{F}_{12} = \int \vec{g}_1 dm_2$ γράφεται $-m_1\vec{g}_2(\vec{r}_1)$.

---

3. Η σφαιρική μάζα m έχει ακτίνα r_m και κινείται στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί η ακίνητη σφαιρική μάζα M, σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, με την Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα $\omega = \sqrt{GM/R^3}$. Ταυτόχρονα είναι «παλιρροϊκά κλειδωμένη», δηλ. περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Σημειακή μάζα $\mu \ll m$ είναι συνδεδεμένη στην επιφάνεια της m μέσω ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ_0 και επιτρέπεται να κινείται στην ευθεία μεταξύ m, M. Ζητείται η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την θέση r της μ ως προς την m, με δεδομένο ότι ισχύει συνεχώς $r \ll R$.
Τι θα άλλαζε αν η μ και το ελατήριο ήταν στο πιο απομακρυσμένο σημείο της m ως προς την M;
Αγνοήστε τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ m, μ.



Λύσεις – Εργασία #7

---

1. (α) Αντικαθιστώντας την πυκνότητα από τον νόμο Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\rho$ η δυναμική ενέργεια γράφεται $V = \dfrac{1}{2}\iiint \Phi\rho\, d\tau = -\dfrac{1}{8\pi G}\iiint \Phi\vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, d\tau$. Το ολοκλήρωμα μπορεί να επεκταθεί σε όλο το χώρο, αφού σε περιοχές εκτός της κατανομής όπου $\rho = 0$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση μηδενίζεται. Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη $\Phi\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{g}) - \vec{g}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{g}) + \vec{g}^2$ και άρα η δυναμική ενέργεια γράφεται $V = -\dfrac{1}{8\pi G}\left[\iiint \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{g})\, d\tau + \iiint g^2\, d\tau\right]$. Βρίσκουμε έτσι την ζητούμενη, γιατί το πρώτο ολοκλήρωμα, σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης, ισούται με $\oiint \Phi\vec{g}\cdot d\vec{a}$ και μηδενίζεται γιατί το σύνορο του όγκου βρίσκεται στο άπειρο και η Φg πλησιάζει το μηδέν πιο γρήγορα από $1/r^2$ (μακρυά από τις μάζες που δημιουργούν το πεδίο η ένταση ελαττώνεται σαν $1/r^2$ και το δυναμικό σαν $1/r$, θεωρώντας το μηδέν στο άπειρο).
Αν είχαμε θεωρήσει μη μηδενικό δυναμικό Φ_∞ στο άπειρο (σταθερό βέβαια γιατί η κλίση του δίνει την ένταση στο άπειρο η οποία είναι μηδενική), θα υπήρχε συνεισφορά προσθετικής σταθεράς στην δυναμική ενέργεια από τον όρο αυτό ίση με $-\dfrac{1}{8\pi G}\Phi_\infty \oiint \vec{g}\cdot d\vec{a} = \dfrac{1}{2}\Phi_\infty M_{\text{total}}$ (χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή του νόμου Gauss). Το ίδιο προκύπτει βέβαια και από την αρχική έκφραση $V = \dfrac{1}{2}\iiint \Phi\rho\, d\tau$· μια προσθετική σταθερά Φ_∞ στο δυναμικό δίνει συνεισφορά $\dfrac{1}{2}\Phi_\infty \iiint \rho\, d\tau = \dfrac{1}{2}\Phi_\infty M_{\text{total}}$ στην δυναμική ενέργεια.
(β) Για σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας η ένταση σε ακτίνα r οφείλεται μόνο στην μάζα εντός του r και είναι $\vec{g}(r) = -\dfrac{Gm(r)\hat{r}}{r^2}$. Η δυναμική ενέργεια είναι $V = -\dfrac{1}{8\pi G}\iiint g^2\, d\tau = -\dfrac{1}{8\pi G}\int_0^\infty \dfrac{G^2[m(r)]^2}{r^4}4\pi r^2\, dr = -\dfrac{1}{2}\int_0^\infty \dfrac{G[m(r)]^2}{r^2}\, dr$. Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη (κάνοντας δηλ. παραγοντική ολοκλήρωση) βρίσκουμε $V = \dfrac{1}{2}\int_0^\infty G[m(r)]^2\, d\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{G[m(r)]^2}{r}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \dfrac{Gm(r)dm}{r}$. Βρίσκουμε έτσι την ζητούμενη, γιατί ο πρώτος όρος μηδενίζεται (κοντά στο κέντρο είναι $m(r) = \rho|_{r=0}\dfrac{4\pi r^3}{3}$ οπότε ο λόγος $\dfrac{G[m(r)]^2}{r}$ μηδενίζεται για $r = 0$, ενώ πολύ μακρυά η $m(r) = M_{\text{total}}$ οπότε ο λόγος $\dfrac{G[m(r)]^2}{r}$ επίσης μηδενίζεται).
Η δυναμική ενέργεια μπορεί να βρεθεί και σαν ίση με το έργο που δαπανούμε (αλγεβρικά) για να δημιουργήσουμε την κατανομή, δηλ. να μεταφέρουμε όλες τις μάζες από το άπειρο στην θέση τους στην κατανομή. (Ισοδύναμα, σαν αντίθετη του έργου που δαπανούμε για να διαλύσουμε την κατανομή, δηλ. να μεταφέρουμε όλες τις μάζες από την θέση τους στην κατανομή στο άπειρο.) Αν μεταφέρουμε μάζα δm από το άπειρο στην θέση $\vec{r}$ στην κατανομή το έργο που δαπανούμε δV είναι αντίθετο από το έργο του πεδίου που δημιουργούν οι μάζες που ήδη έχουμε μεταφέρει, δηλ. $\delta V = -\delta m \int_\infty^{\vec{r}} \vec{g}\cdot d\vec{r} = \delta m \int_\infty^{\vec{r}} d\Phi = \delta m(\Phi - 0) = \Phi\,\delta m$, όπου Φ το δυναμικό του πεδίου των μαζών που ήδη έχουμε μεταφέρει. Φτιάχνοντας την κατανομή φλοιό-φλοιό, όταν έχουμε συμπληρώσει τις μάζες μέχρι την ακτίνα r, το δυναμικό στη θέση που θα φέρουμε τον επόμενο φλοιό είναι $\Phi = -Gm(r)/r$, όπου $m(r) = \int_0^r \rho(r)4\pi r^2\, dr$. Το έργο που δαπανούμε για να φέρουμε τον επόμενο φλοιό μάζας $\rho(r)4\pi r^2\delta r$ είναι $\delta V = [-Gm(r)/r][\rho(r)4\pi r^2\delta r]$ και το συνολικό έργο που δαπανούμε είναι $V = \int [-Gm(r)/r][\rho(r)4\pi r^2\, dr] = -\int \dfrac{Gm(r)\, dm}{r}$ με το ολοκλήρωμα να εκτείνεται σε όλη την κατανομή. (Λόγω του ότι οι βαρυτικές δυνάμεις είναι ελκτικές το έργο που «δαπανούμε» όταν μεταφέρουμε μάζες από το άπειρο είναι αρνητικό, δηλ. στην πραγματικότητα δεν δαπανούμε έργο αλλά εισπράττουμε και η δυναμική

ενέργεια είναι πάντα μικρότερη από την τιμή της στο άπειρο, δηλ. αρνητική.)

(γ) Ένας τρόπος βασίζεται στην $V = -\int_0^\infty \frac{Gm(r)dm}{r}$ με $dm = 4\pi r^2\rho(r)\,dr$, $\rho(r) = \rho = \frac{M}{4\pi R^3/3}$ για $r < R$, $\rho(r) = 0$ για $r > R$ (δηλ. η ολοκληρωτέα είναι μη-μηδενική μόνο για $r < R$), $m(r) = \rho 4\pi r^3/3 = Mr^3/R^3$ για $r < R$ και $m(r) = M$ για $r > R$. Έτσι $V = -\int_0^R \frac{3GM^2r^4dr}{R^6} = -\frac{3GM^2}{5R}$.

Το ίδιο προκύπτει βέβαια και από τις άλλες σχέσεις για την δυναμική ενέργεια. Γνωρίζοντας το δυναμικό ή την ένταση (για το πως τα βρίσκουμε δείτε την 1η άσκηση 7ης εργασίας 2018-2019)

$$\Phi = \begin{cases} \frac{2\pi G\rho r^2}{3} - 2\pi G\rho R^2 & \text{αν } r \le R\,, \\ -\frac{4\pi G\rho R^3}{3r} & \text{αν } r \ge R\,, \end{cases} \qquad \vec{g} = \begin{cases} -\frac{4\pi G\rho \vec{r}}{3} & \text{αν } r \le R\,, \\ -\frac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}\hat{r} & \text{αν } r \ge R\,, \end{cases}$$

βρίσκουμε $V = \frac{1}{2}\iiint \Phi\rho\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^R \left(\frac{2\pi G\rho r^2}{3} - 2\pi G\rho R^2\right)\rho\,4\pi r^2\,dr = -\frac{16\pi^2 G\rho^2 R^5}{15} = -\frac{3GM^2}{5R}$, ή

$$V = -\frac{1}{8\pi G}\iiint g^2\,d\tau = -\frac{1}{8\pi G}\left[\int_0^R \left(\frac{4\pi G\rho r}{3}\right)^2 4\pi r^2\,dr + \int_R^\infty \left(\frac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr\right] = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

---

2. (α) Σύμφωνα με το θεώρημα Νεύτωνα είναι ίδια με ένταση σημειακής μάζας m_1 στο κέντρο της σφαίρας m_1, δηλ. $\vec{g}_1(\vec{r}) = -\frac{Gm_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$.

(β) Όμοια, η ένταση του πεδίου βαρύτητας $\vec{g}_2(\vec{r}_1)$ που δημιουργεί η m_2 στο κέντρο της m_1 είναι ίση με την ένταση σημειακής μάζας m_2 στο κέντρο της σφαίρας m_2, δηλ. $\vec{g}_2(\vec{r}_1) = -\frac{Gm_2\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$.

(γ) $\vec{F}_{12} = -\int \frac{Gm_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}dm_2 = -m_1\int \frac{-G(\vec{r}_1-\vec{r})}{|\vec{r}_1-\vec{r}|^3}dm_2$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι η έκφραση που δίνει την $\vec{g}_2(\vec{r}_1)$ σαν επαλληλία των επιμέρους εντάσεων από κάθε dm_2. Άρα $\vec{F}_{12} = -m_1\vec{g}_2(\vec{r}_1) = \frac{Gm_1m_2\vec{r}_1}{r_1^3}$, δηλ. ίση με την δύναμη μεταξύ σημειακών μαζών στα κέντρα των σφαιρών.

---

3. Στο περιστρεφόμενο σύστημα με αρχή το κέντρο της M η μ απέχει κυλινδρική απόσταση $\varpi = R \mp r$, με το πάνω πρόσημο να αντιστοιχεί στην περίπτωση του σχήματος και το κάτω πρόσημο στην περίπτωση που η μ και το ελατήριο ήταν στο πιο απομακρυσμένο σημείο της m ως προς την M. Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα, λαμβάνοντας υπόψη τη δύναμη ελατηρίου $\pm k(r - r_m - \ell_0)\hat{\varpi}$, τη βαρύτητα $-\frac{GM\mu}{(R\mp r)^2}\hat{\varpi} \approx -\frac{GM\mu}{R^2}\hat{\varpi} \mp \frac{2GM\mu r}{R^3}\hat{\varpi}$ (ο τελευταίος όρος εκφράζει την παλιρροϊκή δύναμη) και τη φυγόκεντρο $\mu\omega^2\varpi\hat{\varpi} = \frac{GM\mu}{R^2}\hat{\varpi} \mp \frac{GM\mu r}{R^3}\hat{\varpi}$ (ο πρώτος της όρος εξουδετερώνει τον σημαντικό πρώτο όρο της βαρύτητας) δίνει $\mu\ddot{\varpi} = \pm k(r - r_m - \ell_0) \mp \frac{3GM\mu r}{R^3} \Leftrightarrow \ddot{r} + \left(\frac{k}{\mu} - \frac{3GM}{R^3}\right)r = \frac{k}{\mu}(r_m + \ell_0)$.

Η εξίσωση κίνησης είναι ίδια και για τις δύο περιπτώσεις και περιγράφει αρμονική ταλάντωση με σημείο ισορροπίας $r = \frac{r_m + \ell_0}{1 - 3GM\mu/kR^3}$ και κυκλική συχνότητα $\sqrt{k/\mu - 3GM/R^3}$.

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε στο περιστρεφόμενο σύστημα με αρχή το κέντρο της m, στο οποίο η μ απέχει κυλινδρική απόσταση r οπότε η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα, λαμβάνοντας υπόψη τη δύναμη ελατηρίου $-k(r - r_m - \ell_0)\hat{r}$, τη βαρύτητα $\pm\frac{GM\mu}{(R\mp r)^2}\hat{r} \approx \pm\frac{GM\mu}{R^2}\hat{r} + \frac{2GM\mu r}{R^3}\hat{r}$, τη φυγόκεντρο $\mu\omega^2 r\hat{r} = \frac{GM\mu r}{R^3}\hat{r}$ και την υποθετική δύναμη $-\mu\vec{a}_0 = \mp\mu\omega^2 R\hat{r} = \mp\frac{GM\mu}{R^2}\hat{r}$, δίνει $\mu\ddot{r} = -k(r - r_m - \ell_0) + \frac{3GM\mu r}{R^3}$.
