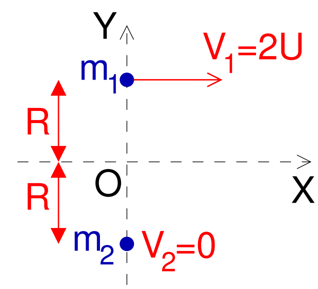
Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

1. Στο κέντρο του Γαλαξία μας υπάρχει μια υπερμεγέθης μελανή οπή με μάζα $M = 4 \times 10^6 M_\odot$ (όπου $M_\odot$ η μάζα του Ήλιου). Ένα άστρο που ονομάζεται S2 κινείται κοντά στο κέντρο του Γαλαξία υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας που δημιουργεί η κεντρική μελανή οπή, σε ελλειπτική τροχιά με περίκεντρο $r_\pi = 120$ AU και απόκεντρο $r_\alpha = 1820$ AU (όπου AU η αστρονομική μονάδα, δηλ. η απόσταση Γης–Ήλιου). Στους υπολογισμούς σας μην λάβετε υπόψη την σχετικότητα.
(α) Βρείτε πόσα Γήινα έτη είναι η περίοδος της κίνησης του άστρου S2 (για να απαλείψετε την σταθερά G χρησιμοποιήσετε τον νόμο Κέπλερ για την κίνηση της Γης, θεωρώντας την κυκλική με ακτίνα 1 AU).
(β) Βρείτε την μέγιστη ταχύτητα του άστρου S2 σαν κλάσμα της ταχύτητας του φωτός c, αν γνωρίζετε ότι $GM_\odot/c^2 = 10^{-8}$ AU.
(γ) Θεωρήστε δεδομένο ότι η διόρθωση που προσθέτει η σχετικότητα είναι ισοδύναμη με προσθήκη δύναμης $-\dfrac{3GML^2}{mc^2r^4}\hat{r}$, όπου m η μάζα του άστρου και L η στροφορμή του. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα του άστρου;

2. Ένα ποζιτρόνιο πλησιάζει ένα ακίνητο πρωτόνιο έχοντας σε μεγάλη απόσταση ταχύτητα v_0 και παράμετρο κρούσης b. Η απωστική δύναμη μεταξύ τους έχει μέτρο k/r^2. Δείξτε ότι η γωνιακή απόκλιση ϑ της τροχιάς του ποζιτρονίου δίνεται από $\tan\dfrac{\vartheta}{2} = \dfrac{k}{mv_0^2 b}$.

3. Δύο άστρα με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$ αλληλεπιδρούν βαρυτικά και έχουν αρχικά τις ταχύτητες και θέσεις του σχήματος με $R = \dfrac{Gm}{4U^2}$.



(α) Ποια η ταχύτητα του κέντρου μάζας και ποιες οι αρχικές ταχύτητες των άστρων ως προς αυτό;
(β) Δείξτε ότι τα άστρα κινούνται κυκλικά γύρω από το κέντρο μάζας (στο σύστημά του).
(γ) Ποια η θέση $X_1(t)$, $Y_1(t)$ του m_1 σε κάθε χρόνο; Σχεδιάστε την τροχιά του.
(δ) Κάποια στιγμή συγκρούεται με το m_1 ένας αστεροειδής με ορμή $\vec{p}$ τέτοια ώστε το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο μετά την κρούση. Θεωρήστε ότι η μάζα του αστεροειδή είναι αμελητέα σε σχέση με την m.
(δ_1) Ποια η $\vec{p}$;
(δ_2) Αν η κρούση είναι πλαστική και γίνεται όταν η ορμή του αστεροειδή είναι αντίρροπη της ορμής του m_1 βρείτε πότε θα συγκρουστούν τα άστρα.
(δ_3) Αν η κρούση είναι πλαστική και γίνεται όταν το m_1 είναι στιγμιαία ακίνητο τι τροχιά εκτελούν τα άστρα μετά την κρούση;
Ποια η ακτίνα καμπυλότητας των τροχιών αμέσως μετά την κρούση;

Λύσεις – Εργασία #6

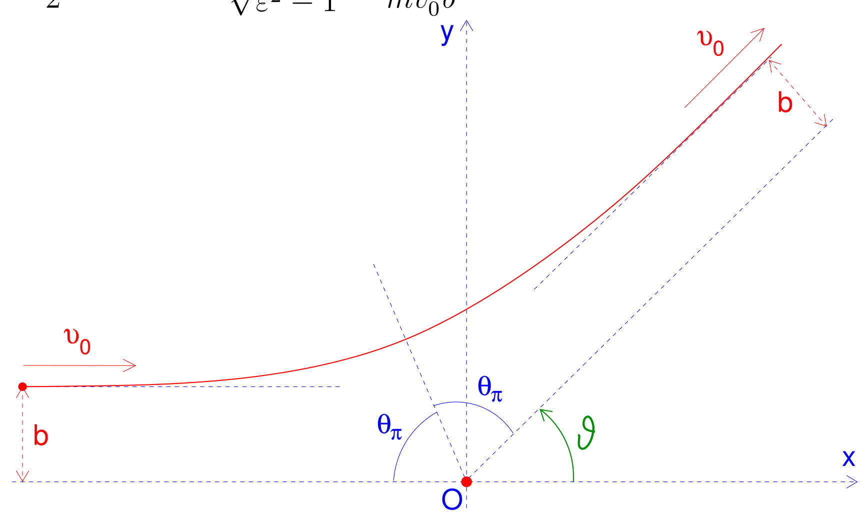
---

1. (α) Ο νόμος του Κέπλερ για την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, θεωρούμενη κυκλική ακτίνας 1 AU, είναι $\Omega = \sqrt{\dfrac{GM_\odot}{(\mathrm{AU})^3}} \Leftrightarrow T_{\Gamma\eta\varsigma} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(\mathrm{AU})^3}{GM_\odot}}$. Όμοια για το άστρο $T_{S2} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\alpha^3}{GM}}$, όπου $M = 4\times 10^6 M_\odot$ η μάζα που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο και $\alpha = \dfrac{r_\pi + r_\alpha}{2} = 970$ AU ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς του. Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $T_{S2} = \sqrt{\dfrac{(\alpha/\mathrm{AU})^3}{M/M_\odot}}T_{\Gamma\eta\varsigma} = \sqrt{\dfrac{970^3}{4\times 10^6}}T_{\Gamma\eta\varsigma} = 15\,T_{\Gamma\eta\varsigma}$, δηλ. η περίοδος είναι ίση με 15 Γήινα έτη.
(β) Το άστρο έχει μέγιστη ταχύτητα v_π στο περίκεντρο της τροχιάς. Αν v_α η ταχύτητα στο απόκεντρο ισχύουν $\dfrac{v_\pi^2}{2} - \dfrac{GM}{r_\pi} = \dfrac{v_\alpha^2}{2} - \dfrac{GM}{r_\alpha}$ (διατήρηση ενέργειας) και $r_\pi v_\pi = r_\alpha v_\alpha$ (διατήρηση στροφορμής). Από την δεύτερη $v_\alpha = v_\pi r_\pi / r_\alpha$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη βρίσκουμε την ταχύτητα στο περίκεντρο $v_\pi = \sqrt{\dfrac{2GM/r_\pi}{1 + r_\pi/r_\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2G\times 4\times 10^6 M_\odot/(120\ \mathrm{AU})}{1+120/1820}} = 250\sqrt{\dfrac{GM_\odot}{\mathrm{AU}}}$. Αφού $GM_\odot = c^2\times 10^{-8}$ AU βρίσκουμε $v_\pi = 0.025\,c$.
Αλλιώς: Η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι $V_{\rm eff}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r}$. Στο περίκεντρο και στο απόκεντρο είναι $V_{\rm eff}(r_\pi) = V_{\rm eff}(r_\alpha) = E$. Η πρώτη ισότητα δίνει την στροφορμή $\dfrac{L}{m} = \sqrt{\dfrac{2GM}{1/r_\pi + 1/r_\alpha}}$ και κατόπιν βρίσκουμε την $v_\pi = \dfrac{L}{mr_\pi}$.
(γ) Η συνολική δύναμη είναι $\vec F = F(r)\hat r$ με $F(r) = -\dfrac{GMm}{r^2} - \dfrac{3GML^2}{mc^2r^4}$, οπότε η δυναμική ενέργεια είναι $V(r) = -\displaystyle\int F(r)dr = -\dfrac{GMm}{r} - \dfrac{GML^2}{mc^2r^3}$. Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{GMm}{r} - \dfrac{GML^2}{mc^2r^3} = E$ δείχνει ότι το άστρο έχει μέγιστη ταχύτητα v_π στο περίκεντρο της τροχιάς. Αν v_α η ταχύτητα στο απόκεντρο ισχύουν $\dfrac{v_\pi^2}{2} - \dfrac{GM}{r_\pi} - \dfrac{GML^2/m^2}{c^2r_\pi^3} = \dfrac{v_\alpha^2}{2} - \dfrac{GM}{r_\alpha} - \dfrac{GML^2/m^2}{c^2r_\alpha^3}$ (διατήρηση ενέργειας) και $L/m = r_\pi v_\pi = r_\alpha v_\alpha$ (διατήρηση στροφορμής). Αντικαθιστώντας στην πρώτη $L/m = r_\pi v_\pi$ και $v_\alpha = v_\pi r_\pi/r_\alpha$ βρίσκουμε την ταχύτητα στο περίκεντρο $v_\pi = \sqrt{\dfrac{2GM/r_\pi}{1 + r_\pi/r_\alpha - 2GM/c^2r_\pi(1 + r_\pi/r_\alpha + r_\pi^2/r_\alpha^2)}}$. Η αριθμητική τιμή της v_π παραμένει πρακτικά ίδια, ίση με $0.025\,c$.
Αλλιώς: Είναι $V_{\rm eff}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r} - \dfrac{GML^2}{mc^2r^3}$. Η σχέση $V_{\rm eff}(r_\pi) = V_{\rm eff}(r_\alpha)$ δίνει την στροφορμή $\dfrac{L}{m} = \sqrt{\dfrac{2GM}{1/r_\pi + 1/r_\alpha - 2GM/c^2(1/r_\pi^2 + 1/r_\pi r_\alpha + 1/r_\alpha^2)}}$ και κατόπιν βρίσκουμε την $v_\pi = \dfrac{L}{mr_\pi}$.

---

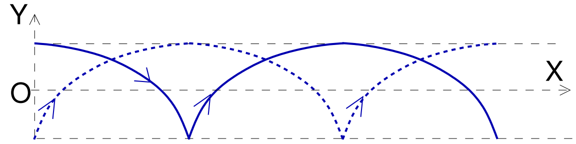
2. Έστω το πρωτόνιο είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων και το ποζιτρόνιο έρχεται από το $x = -\infty$, $y = b$ με ταχύτητα $v_0\hat x$, οπότε αρχικά $r = \infty$, $\phi = \pi$ και $\dot r = -v_0$. Η στροφορμή του είναι $\vec L = \vec r_\perp \times m\vec v$ όπου $\vec r_\perp = b\hat y$ η συνιστώσα του αρχικού $\vec r$ κάθετα στην αρχική ταχύτητα. Άρα $\vec L = -mbv_0\hat z$.
Η εξίσωση τροχιάς $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ με $F = ku^2$ και $L = -mbv_0$ γράφεται $u'' + u = -\dfrac{k}{mb^2v_0^2}$. Η γενική της λύση είναι $u = -\dfrac{k}{mb^2v_0^2} + \dfrac{k}{mb^2v_0^2}\varepsilon\cos(\phi - \phi_0)$, όπου $\varepsilon > 0$ και ϕ_0 σταθερές ολοκλήρωσης που θα

καθοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.
Η τροχιά είναι υπερβολή και ε είναι η εκκεντρότητά της, ενώ η γωνία $\phi = \phi_0$ αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόσταση από το κέντρο που είναι $r_{\min} = \dfrac{1}{u_{\max}} = \dfrac{mb^2 v_0^2}{k(\varepsilon - 1)}$.
Είναι $u = \dfrac{1}{r}$ και $u' = \dfrac{d(1/r)}{\dot\phi\, dt} = \dfrac{-\dot r/r^2}{L/mr^2} = -\dfrac{m}{L}\dot r$.
Αρχικά $u|_{\phi=\pi} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\cos\phi_0 = -1$ και $u'|_{\phi=\pi} = -\dfrac{m}{-mbv_0}(-v_0) = -\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \varepsilon\sin\phi_0 = \dfrac{mv_0^2 b}{k}$. Η λύση του συστήματος δίνει $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{m^2 v_0^4 b^2}{k^2}}$ και $\phi_0 = \pi - \theta_\pi$ με $\theta_\pi = \arccos\dfrac{1}{\varepsilon}$ (αυτή είναι η κοινή λύση των $\sin\phi_0 = \dfrac{mv_0^2 b}{k\varepsilon}$ και $\cos\phi_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$ στο διάστημα $0 \le \phi_0 \le 2\pi$, διότι η γωνία ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο).
Άρα $u = -\dfrac{k}{mb^2 v_0^2} + \dfrac{k}{mb^2 v_0^2}\varepsilon\cos(\phi - \phi_0)$, δηλ. η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{mb^2 v_0^2/k}{-1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)}$.
Η ακτίνα απειρίζεται στις γωνίες $\phi = \phi_0 \pm \arccos\dfrac{1}{\varepsilon} = \pi - \theta_\pi \pm \theta_\pi$. Το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί στην αρχική κατεύθυνση και το κάτω στην τελική. Άρα ασυμπτωτικά $\phi = \pi - 2\theta_\pi$. Αφού αρχικά η ταχύτητα έχει τη φορά του άξονα $\hat x$ ενώ τελικά σχηματίζει γωνία $\pi - 2\theta_\pi$ με τον άξονα $\hat x$ η γωνία εκτροπής είναι $\vartheta = \pi - 2\theta_\pi$. Είναι $\tan\dfrac{\vartheta}{2} = \cot\theta_\pi = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \dfrac{k}{mv_0^2 b}$.



---

3. (α) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $\vec V_{\rm KM} = \dfrac{m_1 \vec V_1 + m_2 \vec V_2}{m_1 + m_2} = U\hat x$ και παραμένει σταθερή απουσία εξωτερικών δυνάμεων.
Ως προς το κέντρο μάζας αρχικά το m_1 έχει ταχύτητα $\vec v_1 = \vec V_1 - \vec V_{\rm KM} = U\hat x$ και το m_2 την αντίθετη $\vec v_2 = \vec V_2 - \vec V_{\rm KM} = -U\hat x$.
(β) Για το m_1 πρέπει η κεντρομόλος $\dfrac{m_1 v_1^2}{R}$ να ισούται με την βαρυτική δύναμη $\dfrac{Gm_1 m_2}{(2R)^2}$ που δέχεται το m_1 από το m_2, κάτι που ισχύει λόγω της $R = \dfrac{Gm}{4U^2}$. Όμοια για το m_2 (οι θέσεις των δύο άστρων είναι άλλωστε σε κάθε στιγμή αντιδιαμετρικές ως προς το κέντρο μάζας).
(γ) Το m_1 εκτελεί επαλληλία δύο κινήσεων, την κίνηση του κέντρου μάζας και την κυκλική γύρω από το κέντρο μάζας με ακτίνα R και γραμμική ταχύτητα U. Η πρώτη είναι $X = Ut\hat x$, $Y = 0$ και η δεύτερη $x_1 = R\sin(Ut/R)$, $y_1 = R\cos(Ut/R)$. Άρα συνολικά $X_1 = Ut + R\sin(Ut/R)$, $Y_1 = R\cos(Ut/R)$.
Η τροχιά είναι κυκλοειδής. Στο σχήμα η συνεχής καμπύλη δείχνει την τροχιά του m_1 και η διακεκομμένη την τροχιά του m_2.



Όμοια συμπεραίνουμε ότι το m_2 έχει θέση σε κάθε χρόνο $X_2 = Ut - R\sin(Ut/R)$, $Y_2 = -R\cos(Ut/R)$. Αυτή είναι η λύση του συστήματος $m\ddot{\vec{R}}_1 = -\dfrac{Gm^2(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|^3}$, $m\ddot{\vec{R}}_2 = -\dfrac{Gm^2(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}$ με αρχικές συνθήκες $\vec{R}_1|_{t=0} = R\hat{y}$, $\vec{R}_2|_{t=0} = -R\hat{y}$, $\dot{\vec{R}}_1|_{t=0} = 2U\hat{x}$, $\dot{\vec{R}}_2|_{t=0} = 0$.

(δ_1) Πρέπει η συνολική ορμή να είναι μηδενική, άρα ο αστεροειδής πρέπει να έχει ορμή αντίθετη της συνολικής ορμής του αρχικού συστήματος, $\vec{p} = -2mU\hat{x}$.

(δ_2) Η ορμή του m_1 έχει την φορά $\hat{x}$ την αρχική στιγμή και μετά από ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου περιστροφής των σωμάτων, δηλ. σε χρόνους $t = 2\pi nR/U$, $n \in \mathbb{N}$. Αμέσως πριν την κρούση το m_1 βρίσκεται στην θέση $X_1 = 2\pi nR$, $Y_1 = R$, έχει ταχύτητα $2U\hat{x}$ και το m_2 βρίσκεται στην θέση $X_2 = 2\pi nR$, $Y_2 = -R$ και είναι ακίνητο, ενώ αμέσως μετά την κρούση οι ταχύτητες είναι μηδενικές (και για τα δύο άστρα). Επομένως, λόγω της βαρυτικής τους έλξης τα άστρα θα αρχίσουν να πλησιάζουν κινούμενα ευθύγραμμα, παράλληλα στον άξονα y. Λόγω συμμετρίας θα έχουν συνεχώς αντίθετες θέσεις Y_1, $Y_2 = -Y_1$ (το κέντρο μάζας παραμένει ακίνητο με $Y_{CM} = 0$ αφού η μάζα του αστεροειδή είναι αμελητέα) και απόσταση $2Y_1$. Άρα ο νόμος του Νεύτωνα δίνει $m\ddot{Y}_1 = -\dfrac{Gm^2}{(2Y_1)^2}$ και ολοκληρώνοντας $\dfrac{m\dot{Y}_1^2}{2} - \dfrac{Gm^2}{4Y_1} = \text{σταθερά} = -\dfrac{Gm^2}{4R}$ από αρχικές συνθήκες.

Το ίδιο από την διατήρηση ενέργειας του συστήματος $\dfrac{m_1\dot{Y}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\dot{Y}_2^2}{2} - \dfrac{Gm^2}{2Y_1} = 0 + 0 - \dfrac{Gm^2}{2R}$.

Αφού $\dot{Y}_1 < 0$ προκύπτει $\dot{Y}_1 = -\sqrt{\dfrac{Gm}{2R}\left(\dfrac{R}{Y_1} - 1\right)}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τον χρόνο μέχρι να συναντηθούν τα άστρα $\Delta t = \displaystyle\int_R^0 \frac{dY_1}{\dot{Y}_1} = \int_R^0 \frac{dY_1}{-\sqrt{\frac{Gm}{2R}\left(\frac{R}{Y_1} - 1\right)}}$. Με την αντικατάσταση $Y_1 = R\cos^2\xi$ με $\xi = 0 \to \pi/2$ είναι $\Delta t = \sqrt{\dfrac{8R^3}{Gm}}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2\xi \, d\xi = \sqrt{\frac{8R^3}{Gm}}\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\xi)}{2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{2Gm}}$.

Αλλιώς: Έχουμε πρόβλημα δύο σωμάτων χωρίς εξωτερικές δυνάμεις. Η σχετική θέση $\vec{r}$ του m_2 ως προς το m_1 καθορίζεται από $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\dfrac{Gm^2}{r^2}\hat{r}$, όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m}{2}$ η ανηγμένη μάζα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η κίνηση είναι ευθύγραμμη και η εξίσωση κίνησης είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\mu\dot{r}^2}{2} - \dfrac{Gm^2}{r} = \text{σταθερά} = -\dfrac{Gm^2}{2R}$ από αρχικές συνθήκες. Αφού $\dot{r} < 0$ προκύπτει $\dot{r} = -\sqrt{\dfrac{2Gm}{R}\left(\dfrac{2R}{r} - 1\right)}$ και συνεχίζουμε όπως πριν. (Είναι άλλωστε $r = 2Y_1$.)

(δ_3) Το m_1 είναι στιγμιαία ακίνητο όταν βρίσκεται στις θέσεις με $Y_1 = -R$ (αυτό συμβαίνει μισή περίοδο περιστροφής μετά την αρχική στιγμή, δηλ. σε χρόνο $\pi R/U$ και σε όλες τις επόμενες που απέχουν πολλαπλάσια της περιόδου από αυτή, δηλ.σε χρόνους $(2n+1)\pi R/U$, $n \in \mathbb{N}$). Τις στιγμές αυτές το m_2 βρίσκεται σε θέση με ίδιο $X_2 = X_1$ και αντίθετο $Y_2 = -Y_1 = R$ και κινείται με ταχύτητα $2U\hat{x}$. Μετά την κρούση το m_1 αποκτά ταχύτητα $-2U\hat{x}$, αντίθετη από αυτή του m_2.

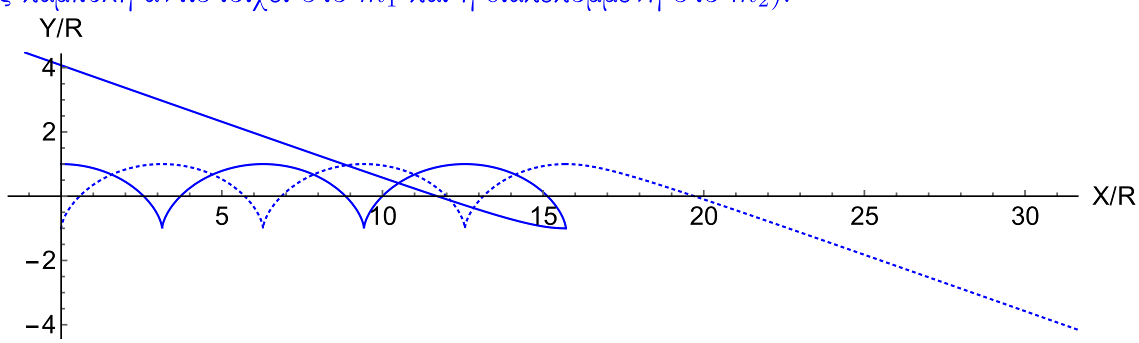
Έχουμε πρόβλημα δύο σωμάτων χωρίς εξωτερικές δυνάμεις. Η σχετική θέση $\vec{r}$ του m_2 ως προς το m_1 καθορίζεται από $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\dfrac{Gm^2}{r^2}\hat{r}$, όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m}{2}$ η ανηγμένη μάζα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση αρχικά (δηλ. αμέσως μετά την κρούση) είναι $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = 2R\hat{y}$ και $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_2 - \dot{\vec{R}}_1 = 4U\hat{x}$. Επομένως τα ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής έχουν τιμές $\frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{Gm^2}{r} = E = 4mU^2 - \frac{Gm^2}{2R} = 2mU^2$ και $\mu r^2\dot{\phi} = L = \vec{L}\cdot\hat{z} = \mu(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\cdot\hat{z} = -4mRU = -\frac{Gm^2}{U}$. Αφού $E > 0$ τα άστρα θα απομακρυνθούν ακολουθώντας υπερβολικές τροχιές.

Από $u''+u = -\frac{\mu F}{L^2u^2} = \frac{\mu Gm^2}{L^2} = \frac{U^2}{2Gm}$ η λύση για την εξίσωση τροχιάς είναι $u = \frac{U^2}{2Gm} + C_1\sin\phi + C_2\cos\phi$. Οι αρχικές συνθήκες (δηλ. αμέσως μετά την κρούση) $\phi = \pi/2$, $u = \frac{1}{2R} = \frac{2U^2}{Gm}$ και $u' = 0$ (αφού $\dot{r} = 0$) προσδιορίζουν τις σταθερές και τελικά έχουμε $u = \frac{U^2}{2Gm} + \frac{3U^2}{2Gm}\sin\phi \Leftrightarrow r = \frac{2Gm/U^2}{1+3\sin\phi}$. Η γωνία ϕ είναι αρχικά $\pi/2$ όταν $r = 2R$, ελαττώνεται καθώς το r αυξάνεται και ασυμπτωτικά γίνεται $\phi = -\arcsin(1/3)$ όταν η απόσταση απειρίζεται.

Η σχετική ταχύτητα είναι $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\phi}\hat{r} + \frac{L}{\mu r}\hat{\phi} = -\frac{Lu'}{\mu}\hat{r} + \frac{Lu}{\mu}\hat{\phi}$ και ασυμπτωτικά γίνεται $U\sqrt{8}\hat{r} = U\sqrt{8}\frac{\sqrt{8}\hat{x}-\hat{y}}{3}$, ενώ η παράμετρος κρούσης (η προβολή του $\vec{r}$ κάθετα στην ταχύτητα, δηλ. στην διεύθυνση $\frac{\hat{x}+\sqrt{8}\hat{y}}{3}$) είναι ασυμπτωτικά $r_\perp = \frac{|L|}{\mu v_\infty} = R\sqrt{8}$, οπότε ασυμπτωτικά $\vec{r}\cdot\frac{\hat{x}+\sqrt{8}\hat{y}}{3} = R\sqrt{8} \Leftrightarrow \frac{x+y\sqrt{8}}{3} = R\sqrt{8}$.

Τα άστρα στο σύστημα του (ακίνητου) κέντρου μάζας τους έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}_1 = -\frac{1}{2}\vec{r}$ και $\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{r}$ (αφού $m_1 = m_2$). Επομένως όταν απομακρυνθούν κινούνται με ταχύτητες $\dot{\vec{r}}_{1,2} = \mp U\sqrt{2}\frac{\sqrt{8}\hat{x}-\hat{y}}{3}$ σε ευθείες που απέχουν από το κέντρο απόσταση $\frac{r_\perp}{2} = R\sqrt{2}$, δηλ. τις $\frac{x_{1,2}+y_{1,2}\sqrt{8}}{3} = \mp R\sqrt{2}$.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις τροχιές πριν και μετά την κρούση, υποθέτοντας ότι αυτή γίνεται 2.5 περιόδους περιστροφής μετά την αρχική στιγμή, οπότε το κέντρο μάζας είναι μετά την κρούση στο σημείο $5\pi R\hat{x}$ (η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί στο m_1 και η διακεκομμένη στο m_2).



Αμέσως μετά την κρούση σε κάθε σώμα ασκείται η βαρυτική δύναμη κάθετα στην ταχύτητά του, επομένως ο νόμος του Νεύτωνα στην διεύθυνση $\hat{n}$ γράφεται $\frac{m(2U)^2}{\mathcal{R}} = \frac{Gm^2}{(2R)^2}$ και δίνει την ακτίνα καμπυλότητας $\mathcal{R} = 4R$.