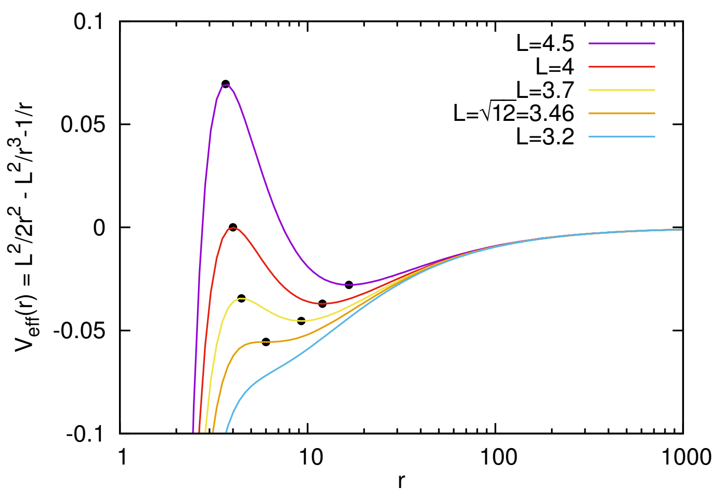
Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

1. Η κίνηση σώματος μάζας m γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild μάζας M περιγράφεται από τις διατηρήσεις στροφορμής $L = mr^2\dot{\phi}$ και ενέργειας $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{GMm}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r)$.

(α) Το γράφημα της $V_{\text{eff}}(r)$ για διάφορες τιμές της στροφορμής φαίνεται δίπλα (σε κατάλληλες μονάδες, με την δυναμική ενέργεια σε μονάδες mc^2, την απόσταση σε μονάδες GM/c^2 και την στροφορμή σε μονάδες GMm/c). Τα μαύρα σημεία είναι τα ακρότατα της συνάρτησης $V_{\text{eff}}(r)$. Δείξτε ότι οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών με στροφορμή L είναι $R_\pm = \frac{6GM/c^2}{1 \mp \lambda^2}$ με $\lambda^2 = \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2m^2}{L^2c^2}}$.



(β) Δείξτε ότι όλες οι ευσταθείς κυκλικές τροχιές έχουν ακτίνες μεγαλύτερες του $6GM/c^2$.

(γ) Δείξτε ότι όλες οι τροχιές είναι λύσεις της $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$, όπου $u = \frac{1}{r}$.

(δ) Έστω R_+ η ακτίνα ευσταθούς κυκλικής τροχιάς με στροφορμή L. Αν διαταράξουμε την κυκλική αυτή τροχιά χωρίς να αλλάξουμε τη στροφορμή, δηλ. ισχύει $u = \frac{1 + q(\phi)}{R_+}$ με $|q(\phi)| \ll 1$, ποια εξίσωση ικανοποιεί η συνάρτηση $q(\phi)$ και ποια η λύση της; Τι τροχιά προκύπτει αν $R_+ \gg GM/c^2$;

---

2. (α) Σε ποιο πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)$ είναι δυνατή η τροχιά $r = \frac{25r_0/12}{2 + \cos(5\phi)}$ με r_0 θετική σταθερά;

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τροχιές στο πεδίο κεντρικής δύναμης $F = \frac{kr_0}{r^3} - \frac{k}{r^2}$ με k θετική σταθερά;

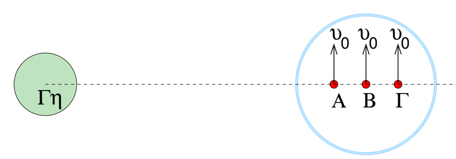
(γ) Για τις περατωμένες τροχιές στο παραπάνω πεδίο βρείτε την περίοδο της ακτινικής κίνησης και τη γωνία που διαγράφεται στο χρόνο αυτό. Είναι περιοδική η κίνηση;

Για απλούστευση μπορείτε να θέσετε $r_0 = k = m = 1$ όπου m η μάζα του σώματος.

Δίνονται $\int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = \frac{\pi(r_1+r_2)}{2}$ και $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr/r}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = \frac{\pi}{\sqrt{r_1 r_2}}$ για $r_1 < r_2$.

---

3. Τρία σώματα ξεκινούν με ίδιες ταχύτητες $\vec{v}_0$ από τις θέσεις Α, Β, Γ του σχήματος, μέσα στο βαρυτικό πεδίο της – θεωρούμενης ακίνητης – Γης. Οι αρχικές τους αποστάσεις από το κέντρο της Γης είναι $r_{\text{A}} = r_0 - b$, $r_{\text{B}} = r_0$ και $r_\Gamma = r_0 + b$. Η ταχύτητα v_0 είναι τέτοια ώστε το Β να εκτελέσει κυκλική τροχιά.



(α) Βρείτε την ενέργεια και την στροφορμή κάθε σώματος και σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό τους.

(β) Υπάρχει b για το οποίο κάποιο από τα σώματα διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης;

(γ) Σχεδιάστε τις τροχιές των σωμάτων Α και Γ.

(Τεκμηριώστε τις επιλογές σας. Θεωρήστε δεδομένη την $r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\phi}$ με $p = \frac{L^2}{GMm^2}$.)

(δ) Έστω $r_0 = 3R$, όπου R η ακτίνα της Γης. Για ποια b κάποιο από τα σώματα πέφτει στη Γη;

(ε) Ποιες οι περίοδοι κίνησης των σωμάτων;

Λύσεις – Εργασία #5

1. (α) $\dfrac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \dfrac{GMm}{r^4}\left(r^2 - \dfrac{L^2}{GMm^2}r + \dfrac{3L^2}{m^2c^2}\right) = 0$ στα σημεία $r = R_\pm = \dfrac{L^2(1\pm\lambda^2)}{2GMm^2} = \dfrac{6GM/c^2}{1\mp\lambda^2}$ όπου $\lambda^2 = \sqrt{1 - \dfrac{12G^2M^2m^2}{L^2c^2}}$. (Μόνο για $|L| \geq \dfrac{\sqrt{12}GMm}{c}$ υπάρχουν ακρότατα.)

(β) Όπως φαίνεται από το σχήμα η μεγαλύτερη ακτίνα R_+ αντιστοιχεί σε ελάχιστο οπότε είναι ευσταθής και η μικρότερη ακτίνα R_- αντιστοιχεί σε μέγιστο και είναι ασταθής.
Το ίδιο προκύπτει και από τη μελέτη της μονοτονίας της V_{eff} μέσω του πρόσημου της παραγώγου dV_{eff}/dr, το οποίο είναι αρνητικό ανάμεσα στις ρίζες $R_\pm$ και θετικό για $r > R_+$ και $r < R_-$.

Προφανώς ισχύει $R_+ = \dfrac{6GM/c^2}{1-\lambda^2} \geq 6GM/c^2$ αφού $\lambda^2 \geq 0$. Η ελάχιστη τιμή $6GM/c^2$ αντιστοιχεί στην λεγόμενη «εσώτατη ευσταθή κυκλική τροχιά» (innermost stable circular orbit).

(γ) Θέτοντας $\dot{r} = \dot{\phi}\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{L}{mr^2}\dfrac{dr}{d\phi} = -\dfrac{L}{m}\dfrac{du}{d\phi}$ στο ολοκλήρωμα ενέργειας έχουμε $E = \dfrac{L^2}{2m}\left(\dfrac{du}{d\phi}\right)^2 + \dfrac{L^2}{2m}u^2 - \dfrac{L^2GM}{mc^2}u^3 - GMmu$. Παραγωγίζοντας ως προς u έχουμε $0 = \dfrac{L^2}{m}\dfrac{du}{d\phi}\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{du}{d\phi}\right) + \dfrac{L^2}{m}u - \dfrac{3L^2GM}{mc^2}u^2 - GMm$. Θέτοντας $\dfrac{du}{d\phi}\dfrac{d}{du} = \dfrac{d}{d\phi}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη.
Αλλιώς: Το ολοκλήρωμα ενέργειας δείχνει ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με κίνηση σώματος σε κεντρικό πεδίο $V(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2}\left(-\dfrac{2GM}{c^2r}\right) - \dfrac{GMm}{r}$, $F(r) = -\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{3L^2GM}{mc^2r^4} - \dfrac{GMm}{r^2}$. Αντικαθιστώντας τη δύναμη αυτή στην εξίσωση $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη.

(δ) Αντικαθιστώντας $u = \dfrac{1+q(\phi)}{R_+}$ στην εξίσωση που καθορίζει την τροχιά και διώχνοντας τόσο τους όρους μηδενικής τάξης (λόγω της $R_+^2 - \dfrac{L^2}{GMm^2}R_+ + \dfrac{3L^2}{m^2c^2} = 0$) όσο και τον όρο δεύτερης τάξης q^2, βρίσκουμε $\dfrac{d^2q}{d\phi^2} + \left(1 - \dfrac{6GM}{c^2R_+}\right)q = 0$, ή αντικαθιστώντας την ακτίνα $\dfrac{d^2q}{d\phi^2} + \lambda^2 q = 0$. Η διαταραχή γύρω από την τροχιά ακτίνας R_+ είναι αρμονική συνάρτηση $q = \varepsilon\cos[\lambda(\phi - \phi_0)]$. (Φαίνεται και από εδώ ότι η τροχιά αυτή είναι ευσταθής.) Με κατάλληλη στροφή του συστήματος μπορούμε να διώξουμε τη σταθερά ϕ_0. Η εξίσωση της διαταραγμένης τροχιάς είναι $r = \dfrac{R_+}{1+\varepsilon\cos(\lambda\phi)}$.
Όμοια μελέτη για διαταραχές γύρω από την ασταθή κυκλική τροχιά ακτίνας R_- καταλήγει στην εξίσωση $\dfrac{d^2q}{d\phi^2} - \lambda^2 q = 0$, εξίσωση που έχει εκθετικές λύσεις κάτι που δείχνει ότι η τροχιά είναι ασταθής.

Αν $R_+ \gg \dfrac{GM}{c^2}$ το λ είναι κοντά στη μονάδα, συγκεκριμένα $\lambda = \sqrt{1 - \dfrac{6GM}{c^2R_+}} \approx 1 - \dfrac{3GM}{c^2R_+}$ η εξίσωση $r = \dfrac{R_+}{1+\varepsilon\cos(\lambda\phi)}$ περιγράφει έλλειψη εκκεντρότητας ε της οποίας το περίκεντρο μεταπίπτει. Αυτό γιατί τα περίκεντρα αντιστοιχούν σε ελάχιστο r, άρα $\cos(\lambda\phi) = 1 \Leftrightarrow \lambda\phi = 2n\pi$ με ακέραιο n, δηλ. $\phi = 2n\pi/\lambda$. Δύο διαδοχικά περίκεντρα αντιστοιχούν σε γωνιακή απόσταση $\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda} - 2\pi$ (αφαιρούμε 2π για να βρούμε την οξεία γωνία, μιας και είναι $\lambda < 1$). Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του περίκεντρου είναι $\Omega = \dfrac{\Delta\phi}{T} = \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)$. Αντικαθιστώντας $\dfrac{1}{\lambda} \approx 1 + \dfrac{3GM}{c^2R_+}$ και $\dfrac{2\pi}{T} \approx \sqrt{\dfrac{GM}{R_+^3}}$ βρίσκουμε $\Omega \approx \dfrac{3G^{3/2}M^{3/2}}{c^2R_+^{5/2}}$.

2. (α) Αντικαθιστώντας $u = \dfrac{1}{r} = 12\dfrac{2+\cos(5\phi)}{25r_0}$ στην $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ βρίσκουμε $F = \dfrac{24L^2}{mr_0}\left(\dfrac{r_0}{r^3} - \dfrac{1}{r^2}\right)$. Το πεδίο είναι αυτό του (β) ερωτήματος και για τη συγκεκριμένη τροχιά πρέπει η στροφορμή να είναι $|L| = \sqrt{\dfrac{mkr_0}{24}}$.

(β) Αντικαθιστώντας τη δύναμη στην $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ βρίσκουμε $u'' + u(1 + mkr_0/L^2) = mk/L^2$. Η μερική λύση είναι $\dfrac{1}{p}$, η λύση της ομογενούς $\dfrac{\varepsilon}{p}\cos[\lambda(\phi-\phi_0)]$ όπου $p = \dfrac{L^2 + mkr_0}{mk}$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{mkp}}{|L|}$ και $\varepsilon > 0$, ϕ_0 σταθερές ολοκλήρωσης και άρα η γενική λύση είναι $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos[\lambda(\phi-\phi_0)]}$.

Για $|L| = \sqrt{mkr_0/24}$, $\varepsilon = 1/2$, $\phi_0 = 0$ βρίσκουμε την τροχιά του (α) ερωτήματος.

Με κατάλληλη στροφή του συστήματος μπορούμε να μηδενίσουμε τη σταθερά ϕ_0 και άρα η γενική λύση είναι $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\lambda\phi)}$.

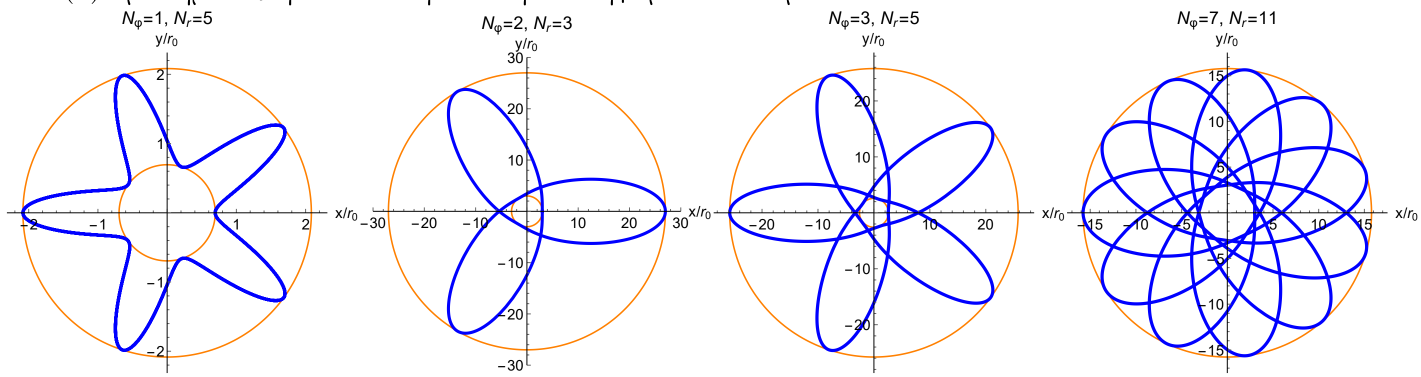
(γ) Η κίνηση είναι περατωμένη αν $\varepsilon < 1$ οπότε γίνεται στο χώρο $r_\pi \le r \le r_\alpha$ όπου $r_\pi = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ (περίκεντρο, αντιστοιχεί σε γωνίες άρτια πολλαπλάσια του π/λ) και $r_\alpha = \dfrac{p}{1-\varepsilon}$ (απόκεντρο, αντιστοιχεί σε γωνίες περιττά πολλαπλάσια του π/λ). Το ημιάθροισμά των ακραίων ακτίνων είναι $\dfrac{r_\pi + r_\alpha}{2} = \dfrac{p}{1-\varepsilon^2}$.

Η περίοδος της ακτινικής κίνησης είναι $T_r = 2\displaystyle\int_{r_\pi}^{r_\alpha}\dfrac{dr}{\dot r}$. Η ακτινική ταχύτητα είναι $\dot r = \dfrac{dr}{d\phi}\dot\phi$. Αντικαθιστώντας $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\lambda\phi)}$ και $\dot\phi = \dfrac{L}{mr^2}$ βρίσκουμε $\dot r = \dfrac{L\lambda\varepsilon\sin(\lambda\phi)}{mp}$. Κατά τη μετάβαση από το περίκεντρο στο απόκεντρο είναι θετική, οπότε $\dot r = \dfrac{|L|\lambda\varepsilon}{mp}\sqrt{1-\cos^2(\lambda\phi)}$ και αντικαθιστώντας $\cos(\lambda\phi) = \dfrac{p}{\varepsilon r} - \dfrac{1}{\varepsilon}$ βρίσκουμε τελικά $\dot r = \sqrt{\dfrac{k}{m}\dfrac{1-\varepsilon^2}{p}}\dfrac{\sqrt{(r-r_\pi)(r_\alpha - r)}}{r}$. Άρα $T_r = 2\sqrt{\dfrac{m}{k}\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}}\displaystyle\int_{r_\pi}^{r_\alpha}\dfrac{r\,dr}{\sqrt{(r-r_\pi)(r_\alpha-r)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}}\dfrac{r_\pi + r_\alpha}{2} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}\left(\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^3}$. (Βρήκαμε μορφή όμοια με το νόμο Κέπλερ.)

Η μελέτη της ακτινικής κίνησης μπορεί να γίνει και μέσω του ολοκληρώματος ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια είναι $V(r) = -\displaystyle\int F(r)\,dr = \dfrac{kr_0}{2r^2} - \dfrac{k}{r}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά) και η ενεργός δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2 + mkr_0}{2mr^2} - \dfrac{k}{r}$ έχει ίδια μορφή με ελκτικό πεδίο δύναμης αντιστρόφως ανάλογης της απόστασης. Για $E < 0$ η κίνηση είναι περατωμένη, γίνεται στο χώρο $r_\pi \le r \le r_\alpha$ όπου r_π, r_α οι ρίζες της $E = V_{\text{eff}}(r) \Leftrightarrow r_{\alpha,\pi} = \dfrac{k}{-2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + 2E\dfrac{L^2+mkr_0}{mk^2}}\right)$. Θέτοντας $\dfrac{L^2+mkr_0}{mk} = p$ και $\varepsilon = \sqrt{1 + 2E\dfrac{L^2+mkr_0}{mk^2}} \Leftrightarrow E = -\dfrac{k(1-\varepsilon^2)}{2p}$ βρίσκουμε $r_\pi = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ και $r_\alpha = \dfrac{p}{1-\varepsilon}$. Από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{m\dot r^2}{2} = E - V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{k(1-\varepsilon^2)}{2p}\dfrac{(r-r_\pi)(r_\alpha-r)}{r^2}$ βρίσκουμε την $\dot r$ και μετά την περίοδο όπως πριν.

Κατά τη μετάβαση από r_π σε r_α και πίσω στην r_π διαγράφεται γωνία $\Delta\phi = 2\displaystyle\int_{r_\pi}^{r_\alpha}\dfrac{\dot\phi}{\dot r}\,dr$ όπου $\dot\phi = \dfrac{L}{mr^2}$ και η $\dot r$ βρίσκεται όπως πριν, οπότε $\Delta\phi = 2L\sqrt{\dfrac{r_\alpha r_\pi}{mkp}}\displaystyle\int_{r_\pi}^{r_\alpha}\dfrac{dr/r}{\sqrt{(r-r_\pi)(r_\alpha-r)}} = \dfrac{2\pi L}{\sqrt{L^2+mkr_0}}$.

Η κίνηση είναι περιοδική μόνο αν η $\Delta\phi$ είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π. Αν $\Delta\phi = \frac{N_\phi}{N_r}2\pi$ όπου N_ϕ, N_r θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, τότε σε N_r ακτινικές περιόδους, δηλ. σε χρόνο $T = N_r T_r$, διαγράφεται γωνία $2\pi N_\phi$ και το σώμα επιστρέφει στο ίδιο σημείο. Η σχέση $\Delta\phi = \frac{N_\phi}{N_r}2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi L}{\sqrt{L^2 + mkr_0}} = \frac{N_\phi}{N_r}2\pi$ συνεπάγεται ότι η στροφορμή είναι $|L| = \sqrt{\frac{N_\phi^2 mkr_0}{N_r^2 - N_\phi^2}}$. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα, με το πρώτο να είναι η τροχιά του (α) ερωτήματος η οποία ανήκει στην κατηγορία των περιοδικών.



---

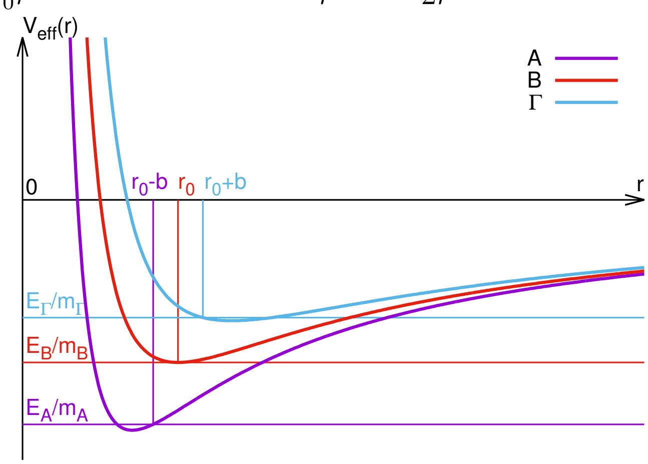
3. Το Β εκτελεί κυκλική τροχιά, άρα $\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$.

(α) $\frac{E_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0 - b} = -\frac{GM(r_0+b)}{2r_0(r_0-b)}$, $\frac{E_\mathrm{B}}{m_\mathrm{B}} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = -\frac{GM}{2r_0}$, $\frac{E_\Gamma}{m_\Gamma} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0+b} = -\frac{GM(r_0-b)}{2r_0(r_0+b)}$,

$\frac{L_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}} = v_0(r_0 - b) = \sqrt{\frac{GM(r_0-b)^2}{r_0}}$, $\frac{L_\mathrm{B}}{m_\mathrm{B}} = v_0 r_0 = \sqrt{GMr_0}$, $\frac{L_\Gamma}{m_\Gamma} = v_0(r_0+b) = \sqrt{\frac{GM(r_0+b)^2}{r_0}}$.

Το ενεργό δυναμικό για κάθε σώμα είναι $V_\text{eff}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2}$, δηλ.

$V_{\text{eff},\mathrm{A}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM(r_0-b)^2}{2r_0r^2}$, $V_{\text{eff},\mathrm{B}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GMr_0}{2r^2}$, $V_{\text{eff},\Gamma}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM(r_0+b)^2}{2r_0r^2}$.

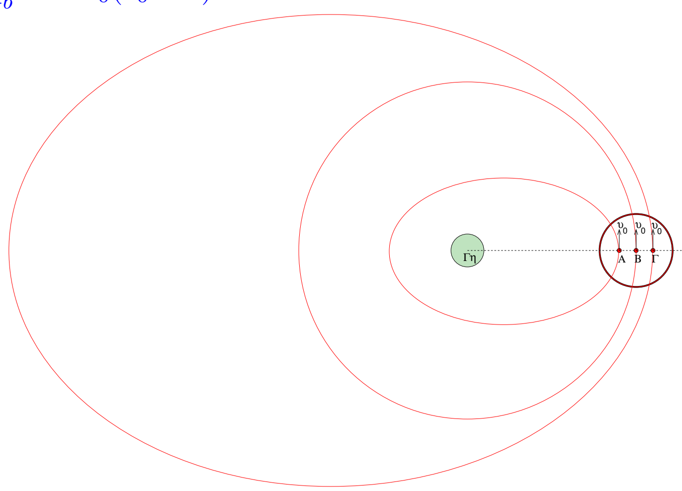


(β) Το Α έχει αρνητική ενέργεια οπότε εκτελεί ελλειπτική τροχιά.

Η ενέργεια του Γ θα μπορούσε να είναι μηδέν ή θετική αν $b = r_0$ ή $b > r_0$, αντίστοιχα (οπότε το σώμα θα διέφευγε ακολουθώντας παραβολική ή υπερβολική τροχιά). Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού θα σήμαινε ότι $r_\mathrm{A} \le 0$. Άρα και το Γ έχει αρνητική ενέργεια οπότε εκτελεί ελλειπτική τροχιά.

(γ) Το Β γνωρίζουμε ότι κινείται κυκλικά, ενώ τα Α και Γ ελλειπτικά. Η αρχική ακτίνα είναι αψίδα της τροχιάς τους (αφού η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα), δηλ. ακρότατη. Το αν είναι ελάχιστη ή μέγιστη

μπορούμε να το συμπεράνουμε χρησιμοποιώντας την σχέση $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\phi}$ με $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}$. Η ελάχιστη απόσταση είναι $r_\pi = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ και η μέγιστη $r_\alpha = \dfrac{p}{1-\varepsilon}$.
Για το Α είναι $p = \dfrac{(r_0-b)^2}{r_0} < r_0 - b$, δηλ. $p < r$, οπότε η αρχική ακτίνα είναι η μέγιστη. Επομένως το Α εκτελεί ελλειπτική τροχιά με το αρχικό σημείο να είναι το απόκεντρο της τροχιάς.
Για το Γ είναι $p = \dfrac{(r_0+b)^2}{r_0} > r_0 + b$, δηλ. $p > r$, οπότε η αρχική ακτίνα είναι η ελάχιστη. Επομένως το Γ εκτελεί ελλειπτική τροχιά με το αρχικό σημείο να είναι το περίκεντρο της τροχιάς.
Το αν είναι ελάχιστη ή μέγιστη μπορούμε να το συμπεράνουμε και μέσω του γραφήματος του ενεργού δυναμικού, από το πρόσημο της παραγώγου $\dfrac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \dfrac{GM}{r^2} - \dfrac{(L/m)^2}{r^3}$ στη συγκεκριμένη αψίδα. (Είναι $\ddot{r} = -\dfrac{dV_{\text{eff}}}{dr}$, οπότε το πρόσημο του $\dfrac{dV_{\text{eff}}}{dr}$ είναι αντίθετο της «δύναμης» και καθορίζει το αν η ταχύτητα $\dot{r}$ από μηδενική θα γίνει θετική ή αρνητική.)
Για το Α είναι $\left.\dfrac{dV_{\text{eff},\text{A}}}{dr}\right|_{r=r_0-b} = \dfrac{GMb}{r_0(r_0-b)^2} > 0$, οπότε η αρχική ακτίνα είναι η μέγιστη.
Για το Γ είναι $\left.\dfrac{dV_{\text{eff},\Gamma}}{dr}\right|_{r=r_0+b} = -\dfrac{GMb}{r_0(r_0+b)^2} < 0$, οπότε η αρχική ακτίνα είναι η ελάχιστη.



(δ) Προφανώς μόνο το Α μπορεί να πέσει στη Γη. Αυτό συμβαίνει αν η ακτίνα r_π του περίκεντρου της τροχιάς του είναι μικρότερη της ακτίνας της Γης R. Η ακτίνα του περίκεντρου είναι $r_\pi = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ με $p = L^2/GMm^2 = (r_0-b)^2/r_0$ και την εκκεντρότητα να βρίσκεται από την δεδομένη ακτίνα του απόκεντρου $\dfrac{p}{1-\varepsilon} = r_0 - b \Leftrightarrow \varepsilon = b/r_0$. Άρα $r_\pi = \dfrac{(r_0-b)^2}{r_0+b}$.
Η ακτίνα r_π μπορεί να βρεθεί και μέσω του γραφήματος του ενεργού δυναμικού· είναι η μικρότερη λύση της εξίσωσης $V_{\text{eff},\text{A}}(r) = \dfrac{E_\text{A}}{m_\text{A}} \Leftrightarrow -\dfrac{GM}{r} + \dfrac{GM(r_0-b)^2}{2r_0r^2} = -\dfrac{GM(r_0+b)}{2r_0(r_0-b)} \Leftrightarrow \dfrac{r_0+b}{r_0-b}r^2 - 2r_0r + (r_0-b)^2 = 0 \Leftrightarrow r = r_0 - b$ (η αρχική ακτίνα) ή $r = \dfrac{(r_0-b)^2}{r_0+b}$ (ακτίνα περίκεντρου).
Το σώμα Α πέφτει στη Γη αν $\dfrac{(r_0-b)^2}{r_0+b} < R \Leftrightarrow b^2 - (R+2r_0)b + r_0^2 - r_0R < 0$.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου $r_0 = 3R$ πρέπει να ισχύει $b^2 - 7Rb + 6R^2 < 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι R και $6R$, οπότε η λύση της ανισότητας είναι $R < b < 6R$. Η σχέση $b < 6R$ ισχύει ούτως ή άλλως (αφού $r_0 - b > R$ είναι $b < 2R$) οπότε για να πέσει το Α στη Γη αρκεί $b > R$ (δηλ. $r_0 - b < 2R$).
(ε) Σύμφωνα με το νόμο του Kepler το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου

ημιάξονα. Ο συντελεστής αναλογίας βρίσκεται εύκολα από την περίπτωση της κυκλικής τροχιάς και έχουμε $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}$. Ο μεγάλος ημιάξονας είναι το ημιάθροισμα των αποστάσεων στο απόκεντρο και το περίκεντρο $a = \dfrac{r_a + r_\pi}{2}$.

Για το σώμα Β είναι $T_{\mathrm{B}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{GM}}$.

Για το Α έχουμε βρει $r_a = r_0 - b$, $r_\pi = \dfrac{(r_0 - b)^2}{r_0 + b}$, οπότε $a = \dfrac{r_0 - b}{r_0 + b} r_0$ και $T_A = \left(\dfrac{r_0 - b}{r_0 + b}\right)^{3/2} T_{\mathrm{B}}$.

Για το Γ ισχύουν τα ίδια, απλά αλλάζοντας το πρόσημο του b, δηλ. είναι $a = \dfrac{r_0 + b}{r_0 - b} r_0$.

Αλλιώς: Στα άκρα της τροχιάς ισχύει $V_{\mathrm{eff},\Gamma}(r) = \dfrac{E_\Gamma}{m_\Gamma} \Leftrightarrow -\dfrac{GM}{r} + \dfrac{GM(r_0 + b)^2}{2r_0 r^2} = -\dfrac{GM(r_0 - b)}{2r_0(r_0 + b)} \Leftrightarrow \dfrac{r_0 - b}{r_0 + b} r^2 - 2r_0 r + (r_0 + b)^2 = 0$, οπότε το ημιάθροισμα των ριζών είναι $a = \dfrac{r_0 + b}{r_0 - b} r_0$.

Η περίοδος είναι $T_\Gamma = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}} = \left(\dfrac{r_0 + b}{r_0 - b}\right)^{3/2} T_{\mathrm{B}}$.

Προφανώς $T_{\mathrm{A}} < T_{\mathrm{B}} < T_\Gamma$.
