# Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

---

1. Μια σημαδούρα βρίσκεται στη θάλασσα σε τόπο γεωγραφικού πλάτους $\lambda$ της περιστρεφόμενης Γης.
(α) Απουσία ανέμου και θαλάσσιων ρευμάτων αιτιολογήστε γιατί η εξίσωση κίνησής της είναι $\vec{a} = -2\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}$, όπου $\vec{\omega}_\perp$ η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας της Γης κάθετα στη θάλασσα.
(β) Δείξτε ότι η κίνηση είναι ομαλή κυκλική με γωνιακή ταχύτητα $\vec{f} = -2\omega \sin\lambda \hat{z}$, όπου $\hat{z}$ η κατεύθυνση προς το ζενίθ του τόπου.

---

2. Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες) κινείται στην λεία παραβολή $y = x^2/2$, όπως στην 2η άσκηση της 2ης εργασίας.
(α) Έστω η παραβολή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \hat{y}$ γύρω από τον άξονα $\hat{y}$ μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g} = \hat{y}$.
($\alpha_1$) Ποια είναι η $\dot{x} = v_x(x)$ (συναρτήσει της θέσης) αν στο ανώτερο σημείο η ταχύτητα είναι $\vec{v}|_{x=0} = \hat{x}$;
($\alpha_2$) Ποια η δύναμη που ασκεί η παραβολή στο δαχτυλίδι και ποια η ισχύς της; Ποιος την προσφέρει;
(β) Αν η παραβολή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \hat{y}$ γύρω από τον άξονα $\hat{y}$ και η βαρύτητα είναι αντίθετη απ΄ ότι πριν, δηλ. $\vec{g} = -\hat{y}$, δείξτε ότι στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς το δαχτυλίδι κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου.
(γ) Έστω ότι $\vec{g} = -\hat{y}$ και η παραβολή τίθεται σε αρμονική ταλαντωτική οριζόντια κίνηση ώστε η ταχύτητά της να είναι $\vec{v}_0 = U\cos(\omega t)\hat{x}$ (με θετικά $U$, $\omega$).
($\gamma_1$) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού σε αυτή την περίπτωση;
($\gamma_2$) Αν αρχικά το δαχτυλίδι βρίσκεται ακίνητο (ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή) στο κατώτερο σημείο $x = 0$ και η κίνησή του περιορίζεται σε μικρά $|x|$ ποια η θέση του σε κάθε χρόνο;

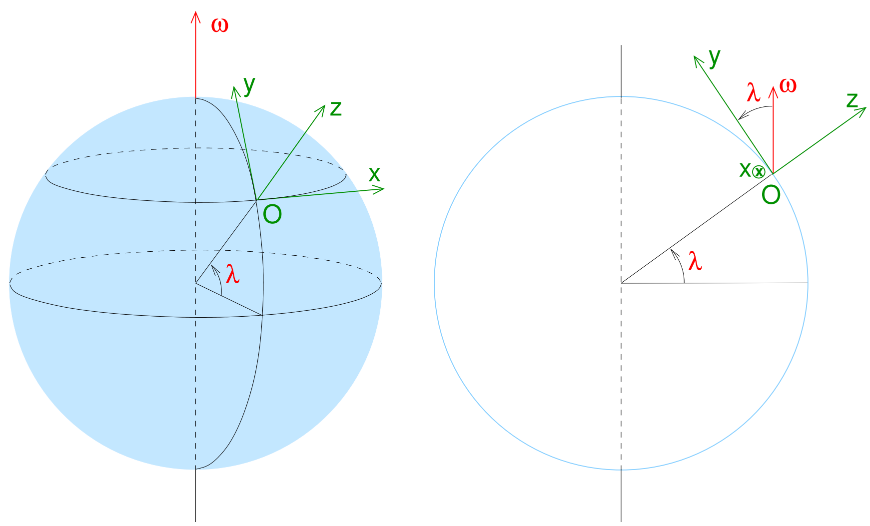
---

3. Σώμα μάζας $m$ κινείται υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F} = -k\vec{r} - b\vec{v}$ όπου $k$ και $b$ θετικές σταθερές. Αρχικά βρίσκεται σε σημείο του άξονα $y$ και έχει ταχύτητα πάνω στον άξονα $y$.
(α) Για «μικρό» $b$ τι ποσοστό ενέργειας χάνεται σε ένα κύκλο;
(β) Αν επιπλέον ασκείται δύναμη $f_0\cos(\omega t)\hat{x}$ με $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{b}{2m}\right)^2}$, πως καταλήγει να κινείται το σώμα σε «μεγάλους» χρόνους;

---

# <u>Λύσεις – Εργασία #4</u>

1. (α) Η επιφάνεια της θάλασσας είναι κάθετη στη φαινόμενη βαρύτητα. Αν θεωρήσουμε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή O κοντά στην σημαδούρα, η φαινόμενη βαρύτητα είναι το άθροισμα της επιτάχυνσης βαρύτητας με την $-\vec{a}_0$ και την φυγόκεντρο (το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων είναι ίσο με την φυγόκεντρο στο περιστρεφόμενο σύστημα με αρχή το κέντρο της Γης). Η άνωση είναι επίσης κάθετη στην επιφάνεια της θάλασσας (αντίθετη του φαινόμενου βάρους του νερού που εκτοπίζεται). Επομένως, στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, η Coriolis είναι η μόνη δύναμη που έχει μη-μηδενική συνιστώσα πάνω στη θαλάσσια επιφάνεια, η οποία μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη γιατί η κίνηση της σημαδούρας είναι τοπική (η απόστασή της από το O είναι πολύ μικρότερη από την ακτίνα της Γης).
Αναλύοντας την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης σε συνιστώσα κατακόρυφη (κάθετη στην επιφάνεια της θάλασσας) $\vec{\omega}_\perp$ και οριζόντια (πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας) $\vec{\omega}_\parallel$, το μέρος της Coriolis $-2m\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}$ είναι οριζόντιο και το $-2m\vec{\omega}_\parallel \times \vec{v}$ είναι κατακόρυφο. Ο νόμος Νεύτωνα είναι $\vec{a} = -2\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}$ (το κατακόρυφο μέρος της Coriolis μαζί με τις υπόλοιπες κατακόρυφες δυνάμεις έχουν μηδενική συνισταμένη).




(β) Αν $\hat{z}$ η κατεύθυνση προς το ζενίθ του τόπου, η προέκταση της οποίας κατά προσέγγιση περνά από το κέντρο της Γης γιατί το σχήμα της Γης είναι σε καλή προσέγγιση σφαιρικό, ισχύει $\vec{\omega}_\perp = \omega \sin\lambda \hat{z}$ (βλέπε σχήμα), οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται $\vec{a} = \vec{f} \times \vec{v}$, όπου $\vec{f} = -2\vec{\omega}_\perp = -2\omega\sin\lambda\hat{z}$. Η σχέση αυτή περιγράφει ομαλή κυκλική κίνηση, κάτι που μπορεί να δειχθεί ολοκληρώνοντάς την χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο κίνησης. Με $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$, $\vec{a} = \dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y}$ και $\vec{f} = -f\hat{z}$ όπου $f = 2\omega\sin\lambda$, η εξίσωση $\vec{a} = \vec{f} \times \vec{v}$ έχει συνιστώσες $\dot{v}_x = f v_y$, $\dot{v}_y = -f v_x$. Λύνοντας την πρώτη ως προς $v_y = \dot{v}_x/f$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $\ddot{v}_x + f^2 v_x = 0 \Leftrightarrow v_x = U\sin(ft+\phi_0)$, οπότε και η πρώτη δίνει $v_y = \dot{v}_x/f = U\cos(ft+\phi_0)$. Αφού $v_x^2 + v_y^2 = U^2$, η σταθερά ολοκλήρωσης $U$ είναι το σταθερό μέτρο ταχύτητας, ενώ η $\phi_0$ μια αρχική φάση. Ολοκληρώνοντας ξανά βρίσκουμε $\dfrac{dx}{dt} = U\sin(ft+\phi_0) \Leftrightarrow x = x_c - \dfrac{U}{f}\cos(ft+\phi_0)$, $\dfrac{dy}{dt} = U\cos(ft+\phi_0) \Leftrightarrow y = y_c + \dfrac{U}{f}\sin(ft+\phi_0)$. Οι τελικές σχέσεις δίνουν $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = (U/f)^2$ δηλ. κύκλο κέντρου $(x_c, y_c)$ και ακτίνας $U/|f|$.
Ένας δεύτερος τρόπος βασίζεται στην παρατήρηση ότι η επιτάχυνση $\vec{a} = \vec{f} \times \vec{v}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα, επομένως η επιτρόχια συνιστώσα της είναι μηδενική, κάτι που σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό. Η επιτάχυνση είναι λοιπόν κεντρομόλος και το μέτρο της είναι $a_k = |\vec{f}|\,|\vec{v}|$, αφού $\vec{f} \perp \vec{v}$, επίσης σταθερό. Συνεπώς η ακτίνα καμπυλότητας $\mathcal{R} = v^2/a_k$ είναι σταθερή, δηλ. η τροχιά είναι κυκλική.
Ένας τρίτος τρόπος βασίζεται στην διανυσματική ολοκλήρωση της $\dot{\vec{v}} = \vec{f} \times \vec{v}$ η οποία δίνει $\vec{v} = \vec{f} \times \vec{r} + \vec{c}$ όπου $\vec{c}$ σταθερό διάνυσμα στο επίπεδο της κίνησης. Το $\vec{c}$ μπορεί να γραφεί $\vec{c} = -\vec{f} \times \vec{r}_0$ οπότε βρίσκουμε τη γνωστή σχέση που περιγράφει κυκλική κίνηση $\vec{v} = \vec{f} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$ με σταθερό $\vec{r}_0$ που αντιστοιχεί στην θέση του κέντρου του κύκλου. Αυτό φαίνεται άμεσα αν πολλαπλασιάσουμε την τελευταία σχέση με $\vec{r} - \vec{r}_0$: $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{v} = (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot[\vec{f} \times (\vec{r}-\vec{r}_0)] \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\dfrac{d(\vec{r}-\vec{r}_0)}{dt} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 =$ σταθ., δηλ. εξίσωση κύκλου.

2. (α$_1$) Στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = \dot{x}(\hat{x} + x\hat{y})$, αφού $\dot{y} = x\dot{x}$. Υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» στο οποίο συνεισφέρει και η φυγόκεντρος, δηλ. ισχύει $\frac{mv^2}{2} - mgy - \frac{m\omega^2 r_\perp^2}{2} = E \Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2(1+x^2)}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = E$. Στο ανώτερο σημείο $x = 0$ η ταχύτητα είναι μοναδιαία, άρα $E = \frac{1}{2}$ και σε κάθε σημείο $\dot{x} = \sqrt{\frac{1+2x^2}{1+x^2}}$ (επιλέγοντας το θετικό πρόσημο ώστε να παίρνουμε την σωστή ταχύτητα στο σημείο $x = 0$).

Αλλιώς: Ο νόμος Νεύτωνα στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + m\omega^2\vec{r}_\perp - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$, όπου $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}(\hat{x} + x\hat{y}) + \dot{x}^2\hat{y}$ και $\vec{r}_\perp = x\hat{x}$. Η συνιστώσα πάνω στην εφαπτομένη της παραβολής (όπου η $\vec{N}$ και η Coriolis δεν έχουν συνιστώσα) δίνει $\vec{a}\cdot\vec{v} = \hat{y}\cdot\vec{v} + x\hat{x}\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \dot{x}\ddot{x}(1+x^2) + \dot{x}^3 x = 2x\dot{x}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται και δίνει $\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^2(1+x^2)}{2}\right] = \frac{dx^2}{dt} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2(1+x^2)}{2} - x^2 = C$, δηλ. το ολοκλήρωμα «ενέργειας».

(α$_2$) Η αντίδραση βρίσκεται από τον νόμο Νεύτωνα $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + m\omega^2\vec{r}_\perp - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$, όπου $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}(\hat{x} + x\hat{y}) + \dot{x}^2\hat{y}$, $\vec{r}_\perp = x\hat{x}$ και $\vec{\omega}\times\vec{v} = -\dot{x}\hat{z}$, δηλ. $\vec{N} = (\ddot{x} - x)\hat{x} + (x\ddot{x} + \dot{x}^2 - 1)\hat{y} - 2\dot{x}\hat{z}$. Αντικαθιστώντας $\dot{x} = \sqrt{\frac{1+2x^2}{1+x^2}}$ και $\ddot{x} = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ προκύπτει $\vec{N} = \frac{x^2(2+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}\,\hat{n} - 2\dot{x}\hat{z}$.
Η ταχύτητα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι $\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r} = |\vec{v}|\,\hat{\varepsilon} - x\hat{z}$. Η ισχύς της αντίδρασης είναι $\vec{N}\cdot\vec{v}_a = 2x\dot{x}$. (Είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας $\frac{mv_a^2}{2} - mgy = x^2 + \frac{1}{2}$.)
Την ισχύ αυτή την προσφέρει ο εξωτερικός παράγοντας που φροντίζει να περιστρέφεται η παραβολή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.
(β) Τώρα το βαρυτικό δυναμικό $gy = y = x^2/2$ είναι αντίθετο του φυγοκεντρικού $-\omega^2 r_\perp^2/2 = -x^2/2$, οπότε το ολοκλήρωμα «ενέργειας» είναι $mv^2/2 = E$ και δίνει σταθερό μέτρο ταχύτητας.
(γ$_1$) Ο νόμος Νεύτωνα στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς της παραβολής είναι $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_0$, όπου $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}(\hat{x} + x\hat{y}) + \dot{x}^2\hat{y}$ και $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0 = -U\omega\sin(\omega t)\hat{x}$. Η συνιστώσα πάνω στην εφαπτομένη της παραβολής (όπου η $\vec{N}$ δεν έχει συνιστώσα) δίνει $\vec{a}\cdot\vec{v} = -\hat{y}\cdot\vec{v} - \vec{a}_0\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \ddot{x}(1+x^2) + \dot{x}^2 x = -x + U\omega\sin(\omega t)$.
(γ$_2$) Για μικρά $|x|$ η εξίσωση κίνησης απλοποιείται σε $\ddot{x} + x = U\omega\sin(\omega t)$, δηλ. έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση. Η γενική λύση είναι σύνθεση ταλαντώσεων. Η πρώτη ταλάντωση γίνεται με την ιδιοσυχνότητα του δαχτυλιδιού και αντιστοιχεί στην λύση της ομογενούς $C_1\sin t + C_2\cos t$. Η δεύτερη γίνεται με την συχνότητα του διεγέρτη και αντιστοιχεί στην μερική λύση $A\sin(\omega t)$, η αντικατάσταση της οποίας στην εξίσωση κίνησης δίνει $A = \frac{U\omega}{1-\omega^2}$. Άρα η γενική λύση είναι $x = C_1\sin t + C_2\cos t + \frac{U\omega}{1-\omega^2}\sin(\omega t)$.
Αρχικά $x|_{t=0} = 0$ οπότε $C_2 = 0$. Η αρχική απόλυτη ταχύτητα είναι μηδενική, άρα η σχέση $\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_0$ δίνει $0 = \dot{x}|_{t=0} + U \Leftrightarrow C_1 = -\frac{U}{1-\omega^2}$. Η θέση του δαχτυλιδιού σε κάθε χρόνο είναι λοιπόν $x = \frac{U}{1-\omega^2}\left[\omega\sin(\omega t) - \sin t\right]$.
Για να είναι η λύση αυτοσυνεπής και η κίνηση πράγματι να περιορίζεται σε μικρά $|x|$ πρέπει να ισχύει $|x_{\max}| \ll 1 \Leftrightarrow \frac{U(\omega+1)}{|1-\omega^2|} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{U}{|1-\omega|} \ll 1$.

---

3. (α) Το σώμα κινείται στον άξονα $y$ (διότι στον άξονα $x$ η αρχική θέση, ταχύτητα, αλλά και επιτάχυνση είναι μηδενικές). Η εξίσωση κίνησης $m\ddot{y} = F \Leftrightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0$ έχει λύσεις $e^{\lambda t}$ με $m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\gamma \pm i\omega$, όπου $\gamma = \frac{b}{2m}$ και $\omega = \sqrt{k/m - \gamma^2}$. Άρα η γενική λύση είναι $y = De^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi_0)$.
Ένας κύκλος διαρκεί χρόνο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Η ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους $De^{-\gamma t}$, δηλ. $E = \frac{1}{2}kD^2 e^{-2\gamma t}$, οπότε σε ένα κύκλο η σχετική μείωση είναι $\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{E|_{t=0} - E|_{t=T}}{E|_{t=0}} = 1 - e^{-2\gamma T} \approx 2\gamma T$, διότι $e^{\xi} \approx 1 + \xi$ για μικρά $\xi$. Αντικαθιστώντας τα $\gamma$, $T$ βρίσκουμε $\frac{|\Delta E|}{E} = 2\frac{b}{2m}\frac{2\pi}{\sqrt{k/m - (b/2m)^2}} \approx \frac{2\pi b}{\sqrt{km}}$.

(β) Οι κινήσεις στους $x$ και $y$ άξονες είναι ανεξάρτητες με αντίστοιχες εξισώσεις $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f_0 \cos(\omega t)$ και $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0$. Στον $y$ άξονα έχουμε φθίνουσα ταλάντωση και το σώμα θα καταλήξει ακίνητο στο $y = 0$. Στον $x$ άξονα έχουμε αρμονική διέγερση, οπότε το σώμα θα καταλήξει να εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους με την συχνότητα του διεγέρτη. Η τελική ταλάντωση αντιστοιχεί στην μερική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης κίνησης. Ένας τρόπος να την βρούμε είναι να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση κίνησης είναι το πραγματικό μέρος της διαφορικής $m\ddot{\zeta} + b\dot{\zeta} + k\zeta = f_0 e^{i\omega t}$ με $x = \mathrm{Re}(\zeta)$. Η μερική λύση αυτής είναι $\zeta = Be^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $B = \frac{f_0}{m\gamma(\gamma + 2i\omega)} = \frac{f_0(\gamma - 2i\omega)}{m\gamma(\gamma^2 + 4\omega^2)}$, όπου $\gamma = \frac{b}{2m}$. Άρα $x = \mathrm{Re}(\zeta) = \mathrm{Re}\left[\frac{f_0(\gamma - 2i\omega)}{m\gamma(\gamma^2 + 4\omega^2)} e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left\{\frac{f_0(\gamma - 2i\omega)}{m\gamma(\gamma^2 + 4\omega^2)}\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]\right\} = \frac{f_0}{m\gamma(\gamma^2 + 4\omega^2)}\left[2\omega \sin(\omega t) + \gamma \cos(\omega t)\right]$.

Αλλιώς: Η μερική λύση είναι της μορφής $x = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$ και η αντικατάσταση στην διαφορική δίνει $(-2\gamma\omega D + \gamma^2 C)\sin(\omega t) + (2\gamma\omega C + \gamma^2 D - f_0/m)\cos(\omega t) = 0$. Οι συναρτήσεις $\sin(\omega t)$ και $\cos(\omega t)$ είναι ανεξάρτητες, άρα οι συντελεστές τους πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι έχουμε το σύστημα $-2\gamma\omega D + \gamma^2 C = 0$, $2\gamma\omega C + \gamma^2 D - f_0/m = 0$ που δίνει $C = \frac{2\omega f_0}{m\gamma(\gamma^2 + 4\omega^2)}$, $D = \frac{f_0}{m(\gamma^2 + 4\omega^2)}$.

Επομένως σε «μεγάλους» χρόνους το σώμα έχει θέση $\vec{r} = \frac{f_0}{m\gamma(\gamma^2 + 4\omega^2)}\left[2\omega \sin(\omega t) + \gamma \cos(\omega t)\right]\hat{x}$.