Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σώμα με μοναδιαία μάζα κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης $F(x) = -\sin x + \sin(2x)$. Αρχικά βρίσκεται στο σημείο $x = \pi/3$ και έχει θετική ταχύτητα v_0.
(α) Βρείτε την δυναμική ενέργεια θεωρώντας ότι μηδενίζεται για $x = 0$ και σχεδιάστε το γράφημά της.
(β) Ποια η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα για μικρές τιμές της v_0;
(γ) Για ποιες v_0 το σώμα περνά στα αρνητικά του άξονα x;
(δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.
Δίνεται $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

---

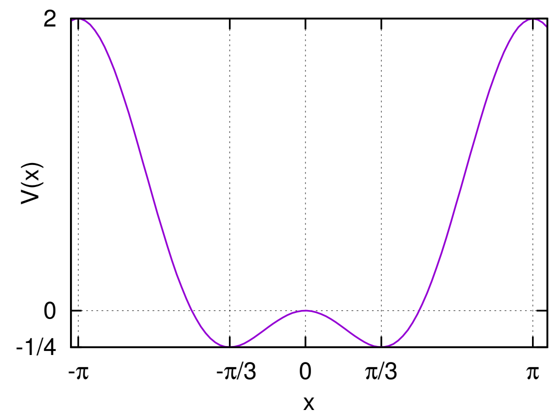
2. Φορτίο q μάζας $m = 1$ κινείται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \dfrac{1/q}{\cos^2 y}\hat{z}$ (σε κατάλληλες μονάδες).
Αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$ με $v_0 > 0$.
(α) Δείξτε ότι η κίνηση είναι επίπεδη.
(β) Δείξτε ότι η v_x προκύπτει να είναι συνάρτηση του y και συγκεκριμένα $v_x = \tan y$.
(γ) Δείξτε ότι το πρόβλημα ανάγεται σε μονοδιάστατο με ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{y}^2}{2} + \dfrac{\tan^2 y}{2} = \dfrac{v_0^2}{2}$.
Σχολιάστε την φυσική σημασία του ολοκληρώματος.
(δ) Σε ποιο μέγιστο y φτάνει το φορτίο και σε πόσο χρόνο;
Δίνεται $\displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{C - \tan^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{C+1}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{C+1}{C}}\sin y\right)$ για $|y| \leq \dfrac{\pi}{2}$. Επίσης $|\sin y| = \sqrt{\dfrac{\tan^2 y}{1 + \tan^2 y}}$.

---

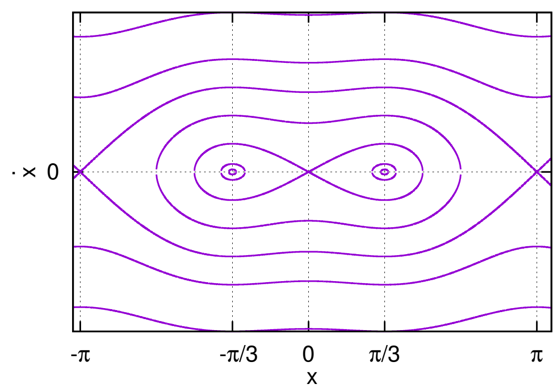
3. Έστω ιδανικό εκκρεμές με σημειακό σώμα μάζας m και νήμα μήκους R. Στο σώμα, εκτός του βάρους mg και της τάσης του νήματος, ασκείται αντίσταση αντίρροπη της ταχύτητας με μέτρο $\dfrac{\lambda m v^2 |\tan\phi|}{2R}$, όπου λ θετική σταθερά, v η ταχύτητα, ϕ η γωνία μεταξύ νήματος και κατακόρυφου. Το σώμα ξεκινά από το κατώτερο σημείο με οριζόντια ταχύτητα v_0.
(α) Ποια διαφορική εξίσωση δίνει την $\dfrac{v^2}{2gR} = f(\phi)$;
(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα ανεβαίνει. Σε ποια θέση σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά;
(γ) Ποια είναι η ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα κατεβαίνει; Με πόση ταχύτητα θα ξαναπεράσει για πρώτη φορά από το κατώτερο σημείο;
Δίνεται ότι η εξίσωση $\dfrac{df}{d\phi} + (k+1)f\,\tan\phi = -\sin\phi$ έχει λύση $f = \left(C\,|\cos\phi|^k + \dfrac{|\cos\phi|^k - 1}{k}\right)\cos\phi$.

Λύσεις – Εργασία #3

1. (α) $V(x) = -\int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x [\sin x - \sin(2x)]\,dx = -\cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$.
(Η επιλογή του κάτω ορίου του ολοκληρώματος εξασφαλίζει ότι $V(0) = 0$. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα και να καθορίσουμε την προσθετική σταθερά ώστε να ισχύει $V(0) = 0$.)
Η συνάρτηση $V(x)$ είναι άρτια. Επίσης είναι επαλληλία δύο συνημιτόνων, άρα περιοδική με περίοδο το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των επιμέρους περιόδων, δηλ. 2π. Άρα για να σχεδιάσουμε το γράφημά της αρκεί να την μελετήσουμε στο διάστημα $x \in [0, \pi]$.
Η παράγωγος $V'(x) = -F(x) = \sin x - \sin(2x) = \sin x - 2\sin x\cos x = 2\sin x\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)$ μηδενίζεται στο $x = 0$ και στο $x = \pi/3$, είναι αρνητική στο $(0, \pi/3)$ και θετική στο $(\pi/3, \pi)$. Άρα η $V(x)$ ξεκινά από $V(0) = 0$ για $x = 0$, μειώνεται μέχρι την τιμή $V(\pi/3) = -1/4$ για $x = \pi/3$ και μετά αυξάνεται μέχρι την τιμή $V(\pi) = 2$ για $x = \pi$.
Το γράφημα φαίνεται δίπλα.



(β) Για μικρές v_0 το σώμα παραμένει στην γειτονιά του $x = \pi/3$. Θέτοντας $q = x - \pi/3$ είναι $V(x) \approx V(\pi/3) + V'(\pi/3)q + \frac{1}{2}V''(\pi/3)q^2$ με $V'(\pi/3) = 0$ και $V''(\pi/3) = 3/2$ (διότι $V''(x) = \cos x - 2\cos(2x)$). Η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = -V'(x) \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{3}{2}q = 0$, οπότε $\omega = \sqrt{3/2}$ και η περίοδος είναι $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{2/3}$.
(γ) Από το γράφημα της δυναμικής ενέργειας φαίνεται ότι πρέπει η ενέργεια να είναι $E < 2$ ώστε να μην περνά τον λόφο στο $x = \pi$ και να ανακλάται, αλλά $E > 0$ ώστε να περνά το λόφο δυναμικού στο $x = 0$ και να περνά στην περιοχή $x < 0$. Δηλ. πρέπει $0 < E < 2$. Αντικαθιστώντας $E = mv_0^2/2 + V(\pi/3) = v_0^2/2 - 1/4$ βρίσκουμε $\frac{1}{\sqrt{2}} < v_0 < \frac{3}{\sqrt{2}}$.



(δ) Το διάγραμμα φάσης φαίνεται κάτω από αυτό της δυναμικής ενέργειας.

---

2. Η εξίσωση Νεύτωνα είναι $\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{v} \times \hat{z}}{\cos^2 y}$ με συνιστώσες $\begin{cases} \dot{v}_x = v_y/\cos^2 y & ① \\ \dot{v}_y = -v_x/\cos^2 y & ② \\ \dot{v}_z = 0 & ③ \end{cases}$
(α) Η ③ ολοκληρώνεται δύο φορές και δίνει $z = 0$ (από αρχικές συνθήκες).
(β) Η ① γράφεται $\dot{v}_x = \dot{y}/\cos^2 y \Leftrightarrow dv_x = dy/\cos^2 y$ και ολοκληρώνεται σε $v_x = \tan y +$ σταθερά. Από αρχικές συνθήκες $v_x = \tan y$.
(γ) Η ② γράφεται $\ddot{y} = -\tan y/\cos^2 y$, δηλ. σαν νόμος Νεύτωνα μονοδιάστατου προβλήματος. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $V(y) = -\int(-\tan y/\cos^2 y)dy = \frac{\tan^2 y}{2} +$ σταθερά. Το ολοκλήρωμα ενέργειας, χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες, είναι $\frac{v_y^2}{2} + \frac{\tan^2 y}{2} = \frac{v_0^2}{2}$.
Η σχέση αυτή εκφράζει την σταθερότητα της ολικής κινητικής ενέργειας, η οποία είναι η συνολική ενέργεια γιατί το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο, γράφεται δηλ. σαν $\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$.

(δ) Αρχικά $y=0$ και $\dot{y}=v_0>0$, δηλ. το y αυξάνεται. Λόγω της $\dfrac{\dot{y}^2}{2}+\dfrac{\tan^2 y}{2}=\dfrac{v_0^2}{2}$ όσο το y αυξάνεται (οπότε αυξάνεται και η $\tan y$) τόσο το $\dot{y}$ μειώνεται. Η μέγιστη τιμή του y αντιστοιχεί σε $\dot{y}=0$ και είναι η $y_m=\arctan v_0$.

Ο χρόνος κίνησης μέχρι αυτή τη θέση είναι $t_m=\displaystyle\int_0^{y_m}\frac{dy}{\dot{y}}$, όπου $\dfrac{\dot{y}^2}{2}+\dfrac{\tan^2 y}{2}=\dfrac{v_0^2}{2}\Leftrightarrow|\dot{y}|=\sqrt{v_0^2-\tan^2 y}$, δηλ. $t_m=\displaystyle\int_0^{y_m}\frac{dy}{\sqrt{v_0^2-\tan^2 y}}$. Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα $t_m=\dfrac{1}{\sqrt{v_0^2+1}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{v_0^2+1}{v_0^2}}\sin y_m\right)$.

Όμως $\sin y_m=\sqrt{\dfrac{\tan^2 y_m}{1+\tan^2 y_m}}=\sqrt{\dfrac{v_0^2}{1+v_0^2}}$ οπότε $t_m=\dfrac{1}{\sqrt{v_0^2+1}}\arcsin 1=\dfrac{1}{\sqrt{v_0^2+1}}\dfrac{\pi}{2}$.

---

3. (α) Αν επιλέξουμε πολικές συντεταγμένες με $\hat{\phi}$ ομόρροπο στην αρχική ταχύτητα στο κατώτερο σημείο, όσο το σώμα ανεβαίνει είναι $\vec{v}=R\dot{\phi}\hat{\phi}$ με $\dot{\phi}>0$ και $\phi>0$, οπότε η αντίσταση είναι $-\dfrac{\lambda m v^2|\tan\phi|}{2R}\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=-\dfrac{\lambda m v^2\tan\phi}{2R}\hat{\phi}$. Η επιτάχυνση είναι $\vec{a}=-R\dot{\phi}^2\hat{\varpi}+R\ddot{\phi}\hat{\phi}$ και το βάρος $mg\cos\phi\hat{\varpi}-mg\sin\phi\hat{\phi}$ οπότε η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $mR\ddot{\phi}=-mg\sin\phi-\dfrac{\lambda m v^2\tan\phi}{2R}$. Θέτοντας $\ddot{\phi}=\dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}=\dfrac{1}{2R^2}\dfrac{dv^2}{d\phi}$, γράφεται $\dfrac{df}{d\phi}+\lambda f\tan\phi=-\sin\phi$.

(β) Σύμφωνα με την υπόδειξη και αφού $\cos\phi>0$, η λύση είναι $\dfrac{v^2}{2gR}=\left[C\left(\cos\phi\right)^{\lambda-1}+\dfrac{\left(\cos\phi\right)^{\lambda-1}-1}{\lambda-1}\right]\cos\phi$.

Για $\phi=0$ είναι $v=v_0$, οπότε $C=\dfrac{v_0^2}{2gR}$ και σε κάθε θέση $v=\sqrt{v_0^2\left(\cos\phi\right)^{\lambda}+2gR\dfrac{\left(\cos\phi\right)^{\lambda}-\cos\phi}{\lambda-1}}$.

Το σώμα σταματά όταν $\cos\phi\left[1-(1-\lambda)C-\left(\cos\phi\right)^{1-\lambda}\right]=0$. Αν ισχύει $\lambda>1-1/C\Leftrightarrow\lambda>1-\dfrac{2gR}{v_0^2}$ η μικρότερη λύση είναι η οξεία γωνία $\phi_1=\arccos\left[1-\dfrac{(1-\lambda)v_0^2}{2gR}\right]^{1/(1-\lambda)}$, ενώ αν $\lambda\le 1-1/C\Leftrightarrow\lambda\le 1-\dfrac{2gR}{v_0^2}$ είναι η γωνία $\phi_1=\pi/2$.

(γ) Στο κατέβασμα ισχύει $mR\ddot{\phi}=-mg\sin\phi+\dfrac{\lambda m v^2\tan\phi}{2R}\Leftrightarrow\dfrac{df}{d\phi}-\lambda f\tan\phi=-\sin\phi$. Σύμφωνα με την υπόδειξη και αφού $\cos\phi>0$, η λύση είναι $\dfrac{v^2}{2gR}=\left[D-\dfrac{1-\left(\cos\phi\right)^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right]\left(\cos\phi\right)^{-\lambda}$.

Για $\phi=\phi_1$ είναι $v=0$, οπότε $D=\dfrac{1-\left(\cos\phi_1\right)^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ και σε κάθε θέση $v=-\sqrt{2gR\cos\phi\dfrac{1-\left(\cos\phi_1/\cos\phi\right)^{\lambda+1}}{\lambda+1}}$.

Στην κατώτερη θέση $\phi=0$ προκύπτει $v_1=-\sqrt{2gR\dfrac{1-\left(\cos\phi_1\right)^{\lambda+1}}{\lambda+1}}$. Αν ισχύει $\lambda>1-\dfrac{2gR}{v_0^2}$ είναι $\dfrac{(1+\lambda)v_1^2}{2gR}=1-\left[1-\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\dfrac{(1+\lambda)v_0^2}{2gR}\right]^{(1+\lambda)/(1-\lambda)}$, ενώ αν $\lambda\le 1-\dfrac{2gR}{v_0^2}$ είναι $\dfrac{v_1^2}{2gR}=\dfrac{1}{1+\lambda}$.

Στην συνέχεια η κίνηση επαναλαμβάνεται, αλλά με αρχική ταχύτητα στο κατώτερο σημείο την v_1. Το νέο $C=\dfrac{v_1^2}{2gR}$ ικανοποιεί την $\lambda>1-\dfrac{1}{C}$, το σώμα φτάνει μέχρι την γωνία $\phi_2=-\arccos\left[1-\dfrac{(1-\lambda)v_1^2}{2gR}\right]^{1/(1-\lambda)}$, στην συνέχεια φτάνει στο κατώτερο σημείο με ταχύτητα $v_2=\sqrt{2gR\dfrac{1-\left(\cos\phi_2\right)^{\lambda+1}}{\lambda+1}}$, κ.ο.κ.
