Μηχανική Ι – Εργασία #2

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

---

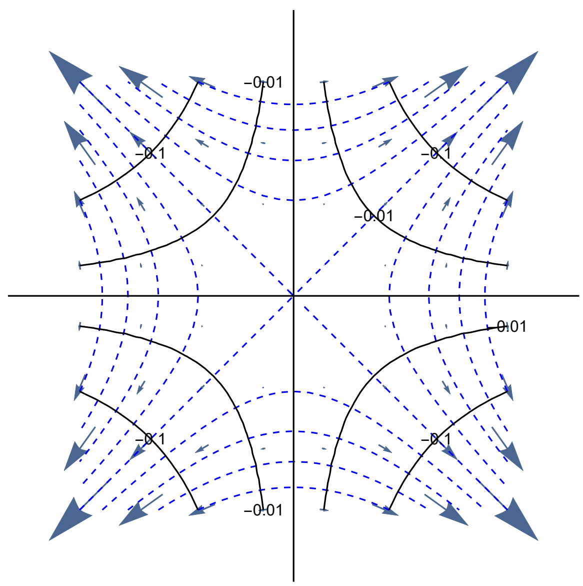
1. Σώμα μάζας m αφήνεται το χρόνο $t = 0$ να πέσει υπό την επίδραση του βάρους mg και δύναμης αντίστασης μέτρου λv^2 με «μικρό» λ. Μετά από χρόνο t, πόσο διαφέρει η ταχύτητά του από την τιμή gt που θα είχε αν δεν υπήρχε αντίσταση;
Απαντήστε με δύο τρόπους:
(α) επιλύοντας ακριβώς το πρόβλημα και κατόπιν βρίσκοντας την διόρθωση με κατάλληλο ανάπτυγμα Taylor,
(β) διαταρακτικά.
(γ) Τι σημαίνει «μικρό» λ;
Δίνεται το ολοκλήρωμα $\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right|$ και το ανάπτυγμα $\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ για $|x| \ll 1$.

---

2. Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες) κινείται στην λεία παραβολή $y = x^2/2$ μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g} = \hat{y}$.
(α) Δείξτε ότι αν στο ανώτερο σημείο έχει ταχύτητα $\vec{v}|_{x=0} = \hat{x}$ τότε η $\hat{x}$ συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι σταθερή καθ΄ όλη την κίνηση και ίση με $\dot{x} = 1$.
(β) Βρείτε σε κάθε θέση, συναρτήσει του x, τα μοναδιαία πάνω και κάθετα στην κίνηση (τα $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{n}$), τις αντίστοιχες συνιστώσες της επιτάχυνσης ($\vec{a}_{\varepsilon}$ και $\vec{a}_{\kappa}$) και την ακτίνα καμπυλότητας της παραβολής ($\mathcal{R}$).
(γ) Ποια η δύναμη που ασκεί η παραβολή στο δαχτυλίδι; Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

---

3. Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = \lambda x y^2\,\hat{x} + x^2 y\,\hat{y}$ (σε κατάλληλες μονάδες), όπου λ σταθερά.
(α) Έστω η ευθεία με εξίσωση $\{y = 1 - x/a\,, z = 0\}$ με a θετική σταθερά, Α η τομή της με τον άξονα y και Β η τομή της με τον άξονα x. Βρείτε το έργο της $\vec{F}$ για τις δύο ακόλουθες διαδρομές που ξεκινούν από το Α και καταλήγουν στο Β:
(α_1) η πρώτη είναι η ευθύγραμμη Α→Β,
(α_2) η δεύτερη αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα Α→Ο→Β, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
(β) Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή του λ η $\vec{F}$ ίσως είναι συντηρητική;
Για αυτή τη τιμή του λ δείξτε ότι είναι πράγματι συντηρητική και βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x, y)$.
Μπορείτε να καταλάβετε τι δείχνει το δίπλα διάγραμμα σε σχέση με την δυναμική ενέργεια και το πεδίο της δύναμης;



(γ) Για ποιες συναρτήσεις $f(x, y)$ το πεδίο $\vec{F} = f(x, y)\left(\frac{\hat{x}}{x} + \frac{\hat{y}}{y}\right)$ είναι συντηρητικό;

Λύσεις – Εργασία #2

1. (α) Η εξίσωση κίνησης $m\dot{v} = mg - \lambda v^2$ είναι χωριζομένων μεταβλητών και δίνει $\int_0^v \frac{m\,dv}{mg - \lambda v^2} = \int_0^t dt \Leftrightarrow$ $\int_0^v \frac{dv/U}{1-(v/U)^2} = \int_0^t \frac{g}{U} dt$ όπου $U = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$.

Είναι $\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \int_0^\xi \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right) d\xi = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right|$ και άρα $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+v/U}{1-v/U}\right| = \frac{gt}{U}$. Η ποσότητα μέσα στο απόλυτο είναι αρχικά θετική και παραμένει θετική όσο η ταχύτητα v είναι μικρότερη της U. Όταν η v πλησιάζει την U ο λογάριθμος απειρίζεται, άρα και το δεξιό μέλος της ισότητας, δηλ. ο χρόνος. Επομένως ισχύει πάντα $v < U$ και η λύση είναι $\frac{1}{2}\ln\frac{1+v/U}{1-v/U} = \frac{gt}{U} \Leftrightarrow \frac{1+v/U}{1-v/U} = e^{2gt/U} \Leftrightarrow v = U\tanh\left(\frac{gt}{U}\right)$, ή, $v = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\tanh\left(t\sqrt{\frac{\lambda g}{m}}\right)$.

Για «μικρό» λ, το αδιάστατο όρισμα της tanh είναι μικρό και μπορούμε να αναπτύξουμε την συνάρτηση αυτή κατά Taylor. «Μικρό» λ λοιπόν σημαίνει $t\sqrt{\frac{\lambda g}{m}} \ll 1 \Leftrightarrow \lambda \ll \frac{m}{gt^2}$.

Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = \tanh x$ γύρω από το μηδέν είναι $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3$ και αφού $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $f''(x) = -\frac{2\sinh x}{\cosh^3 x}$, $f'''(x) = -\frac{2}{\cosh^2 x} + \frac{6\sinh^2 x}{\cosh^4 x}$ προκύπτει $\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ (όπως θα φανεί και στην συνέχεια, για να βρούμε την πρώτη διόρθωση της ταχύτητας σε σχέση με την τιμή gt πρέπει να κρατήσουμε δύο μη-τετριμμένους όρους στο ανάπτυγμα, δηλ. να κρατήσουμε μέχρι 3ης τάξης όρους, μιας και για την συγκεκριμένη συνάρτηση ισχύει $f(0) = 0$ και $f''(0) = 0$).

Επομένως για «μικρό» λ ισχύει $v \approx \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\left[t\sqrt{\frac{\lambda g}{m}} - \frac{1}{3}\left(t\sqrt{\frac{\lambda g}{m}}\right)^3\right] = gt - \frac{\lambda g^2 t^3}{3m}$. Η ταχύτητα λοιπόν διαφέρει από gt κατά $-\frac{\lambda g^2 t^3}{3m}$.

(β) Η μηδενικής τάξης λύση (για $\lambda = 0$) είναι $v^{(0)} = gt$. Προσθέτουμε διαταραχή $v^{(1)}$, την οποία θεωρούμε ανάλογη του λ. Κρατώντας μέχρι όρους ανάλογους του λ στην εξίσωση κίνησης έχουμε $m\dot{v}^{(0)} + m\dot{v}^{(1)} = mg - \lambda[v^{(0)}]^2 \Leftrightarrow \dot{v}^{(1)} = -\frac{\lambda g^2 t^2}{m}$ και ολοκληρώνοντας $v^{(1)} = -\frac{\lambda g^2 t^3}{3m}$ (μηδενίσαμε την σταθερά ολοκλήρωσης γιατί για $t = 0$ η διαταραχή πρέπει να μηδενίζεται ώστε να ισχύει η αρχική συνθήκη $v^{(0)} + v^{(1)} = 0$). Βρήκαμε λοιπόν ότι η ταχύτητα διαφέρει από $v^{(0)} = gt$ κατά $v^{(1)} = -\frac{\lambda g^2 t^3}{3m}$.

«Μικρό» λ σημαίνει $|v^{(1)}| \ll |v^{(0)}| \Leftrightarrow \lambda \ll \frac{m}{gt^2}$.

(γ) Και με τις δύο μεθόδους σχολιάστηκε ότι «μικρό» λ σημαίνει $\lambda \ll \frac{m}{gt^2}$.

---

2. (α) $\dot{y} = x\dot{x}$, $\vec{v} = \dot{x}(\hat{x} + x\hat{y})$, $v^2 = \dot{x}^2(1+x^2)$. Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgy = E$, υπολογίζοντας την ενέργεια στο ανώτερο σημείο, δίνει $\frac{\dot{x}^2(1+x^2)}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\dot{x}| = 1$, δηλ. $\dot{x} = 1$ (επιλέγουμε την θετική λύση ώστε να έχει την φορά της δεδομένης ταχύτητας στο ανώτερο σημείο).

Αλλιώς: Η επιτάχυνση είναι $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}(\hat{x} + x\hat{y}) + \dot{x}^2\hat{y}$ και ο νόμος Νεύτωνα $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ έχει συνιστώσα πάνω στην τροχιά (όπου η αντίδραση $\vec{N}$ δεν έχει συνιστώσα) $\vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{g}\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \dot{x}\ddot{x}(1+x^2) + \dot{x}^3 x = x\dot{x}$. Η τελευταία επαληθεύεται αν $\dot{x}=1$. Η λύση του νόμου Νεύτωνα για δεδομένες αρχικές συνθήκες είναι μοναδική, οπότε η $\dot{x}=1$ είναι η μοναδική λύση που αντιστοιχεί στην δεδομένη συνθήκη $\vec{v}|_{x=0}=\hat{x} \Leftrightarrow \dot{x}|_{x=0}=1$. (Εναλλακτικά, η σχέση που βρέθηκε ολοκληρώνεται και δίνει $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\dot{x}^2(1+x^2)}{2}\right]=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{\dot{x}^2(1+x^2)}{2}-\dfrac{x^2}{2}=C$, το οποίο είναι ακριβώς το ολοκλήρωμα ενέργειας. Από την συνθήκη $\dot{x}|_{x=0}=1$ βρίσκουμε $C=\dfrac{1}{2}$ και τελικά $|\dot{x}|=1$, δηλ. $\dot{x}=1$.)

Αν t_0 είναι ο χρόνος που περνά το δαχτυλίδι από το ανώτερο σημείο ισχύουν $x=t-t_0$, $y=(t-t_0)^2/2$.

(β) $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{x}\hat{y}=\hat{y}$, $\hat{\varepsilon}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\dfrac{\hat{x}+x\hat{y}}{\sqrt{1+x^2}}$, $\vec{a}_\varepsilon=(\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\,\hat{\varepsilon}=\dfrac{x\hat{x}+x^2\hat{y}}{1+x^2}$, $\vec{a}_\kappa=\vec{a}-\vec{a}_\varepsilon=\dfrac{-x\hat{x}+\hat{y}}{1+x^2}$, $\hat{n}=\dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|}=\dfrac{-x\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{1+x^2}}$, $\mathcal{R}=\dfrac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_\kappa|}=(1+x^2)^{3/2}$.

(γ) Αφού στον $\hat{x}$ άξονα η κίνηση είναι ισοταχής η προβολή της συνισταμένης των δυνάμεων είναι μηδενική. Το βάρος δεν έχει συνιστώσα άρα δεν έχει και η δύναμη $\vec{N}$ που ασκεί η παραβολή στο δαχτυλίδι, δηλ. είναι $N_x=0$. Και η κατακόρυφη συνιστώσα N_y είναι μηδενική, αφού η $\vec{N}$ είναι κάθετη στην παραβολή (οπότε οι δύο συνιστώσες της είναι ανάλογες). Άρα $\vec{N}=0$!

Το ίδιο προκύπτει και από τον νόμο Νεύτωνα $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}$ με $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\hat{y}$ (διότι $\vec{v}=\hat{x}+x\hat{y}$ και $\dot{x}=1$).

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η κίνηση είναι η γνωστή παραβολική σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, κατά την οποία η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος. Πράγματι, οι σχέσεις $x=t-t_0$ και $y=(t-t_0)^2/2$ είναι ισοδύναμες με αυτές της πλάγιας βολής $x=x_0+v_{0x}t$, $y=y_0+v_{0y}t+gt^2/2$, με $x_0=-t_0$, $y_0=t_0^2/2$, $v_{0x}=1$, $v_{0y}=-t_0$ και $g=1$.

---

3. (α) Το σημείο Α βρίσκεται στον άξονα y, οπότε έχει $x_{\mathrm{A}}=0$, $z_{\mathrm{A}}=0$ και $y_{\mathrm{A}}=1$ όπως προκύπτει από την $y=1-\dfrac{x}{a}$.

Το σημείο Β βρίσκεται στον άξονα x, οπότε έχει $y_{\mathrm{B}}=0$, $z_{\mathrm{B}}=0$ και $x_{\mathrm{B}}=a$ όπως προκύπτει από την $y=1-\dfrac{x}{a}$.

(α_1) Για την Α→Β, επιλέγοντας σαν παράμετρο το x, είναι $x=0\to a$, $y=1-\dfrac{x}{a}$, $dy=-\dfrac{dx}{a}$, $z=0$, $dz=0$, $d\vec{r}=dx\hat{x}-(1/a)dx\hat{y}$, $\vec{F}=\lambda x(1-x/a)^2\,\hat{x}+x^2(1-x/a)\,\hat{y}$ και $\vec{F}\cdot d\vec{r}=[(\lambda+1)x^3/a^2-(2\lambda+1)x^2/a+\lambda x]\,dx$, άρα $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}=\displaystyle\int_0^a\Big[(\lambda+1)x^3/a^2-(2\lambda+1)x^2/a+\lambda x\Big]\,dx=a^2(\lambda-1)/12$.

(α_2) Για την Α→Ο είναι $x=0$ οπότε $\vec{F}=0$ και άρα $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{O}}=0$. Για την Ο→Β είναι $y=0$ οπότε $\vec{F}=0$ και άρα $W_{\mathrm{B}\to\mathrm{O}}=0$. Επομένως για την διαδρομή Α→Ο→Β το έργο είναι μηδενικό.

(β) Αναγκαία (όχι ικανή) συνθήκη για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική είναι τα αποτελέσματα των (α_1) και (α_2) να είναι ίσα, αφού τα σημεία αφετηρίας και τερματισμού είναι ίδια, δηλ. να ισχύει $\lambda=1$.

Αν ισχύει $\lambda=1$ το πεδίο είναι $\vec{F}=xy^2\,\hat{x}+x^2y\,\hat{y}$.

Το πεδίο είναι συντηρητικό αν υπάρχει συνάρτηση V τέτοια ώστε $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$. Οι συνιστώσες της σχέσης αυτής είναι $xy^2=-\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $x^2y=-\dfrac{\partial V}{\partial y}$ και $0=-\dfrac{\partial V}{\partial z}$.

Λόγω της τρίτης $V=V(x,y)$. Η πρώτη ολοκληρώνεται σε $V=-x^2y^2/2+C(y)$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη προκύπτει $x^2y=x^2y+C'(y) \Leftrightarrow C'(y)=0$, δηλ. $C=$ σταθερά. Επομένως το πεδίο είναι συντηρητικό αν ισχύει $\lambda=1$ και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V=-x^2y^2/2+$ σταθερά.

Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό μέσω της $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$. Θα έπρεπε όμως ούτως ή άλλως να ακολουθήσουμε την προηγούμενη διαδικασία για να βρούμε την V, η ύπαρξη της οποίας ταυτόχρονα δείχνει ότι το πεδίο είναι συντηρητικό.

Στο διάγραμμα της εκφώνησης οι συνεχείς καμπύλες είναι οι ισοδυναμικές $V=$ σταθερό, οι οποίες είναι

υπερβολές $y \propto 1/x$ (φαίνονται και οι τιμές της V πάνω σε κάθε καμπύλη).
Λόγω της $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, η δύναμη είναι κάθετη στις ισοδυναμικές (όπως και οι δυναμικές γραμμές της $\vec{F}$), με φορά από μεγάλες σε μικρές τιμές της V. Οι διακεκομμένες είναι οι δυναμικές γραμμές και τα βέλη δείχνουν την φορά της δύναμης.

(γ) Πρέπει να ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{f(x,y)}{x} & \dfrac{f(x,y)}{y} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \ln|x|} = \dfrac{\partial f}{\partial \ln|y|}$.

Αλλάζοντας μεταβλητές από x, y σε $\xi = \ln|x| + \ln|y| = \ln|xy|$, $\eta = \ln|x| - \ln|y|$, οπότε $x\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \eta}$ και $y\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} - \dfrac{\partial}{\partial \eta}$, προκύπτει $\dfrac{\partial f}{\partial \eta} = 0$. Άρα η γενική λύση είναι $f = f(\xi)$. Ισοδύναμα, η f πρέπει να είναι συνάρτηση του γινομένου xy.

Η δυναμική ενέργεια πρέπει να ικανοποιεί τις $x\dfrac{\partial V}{\partial x} = -f$, $y\dfrac{\partial V}{\partial y} = -f$. Αλλάζοντας μεταβλητές από x, y σε ξ, η προκύπτει $V = V(\xi) = -\displaystyle\int f(\xi)\, d\xi$.
