Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021 Ν. Βλαχάκης

---

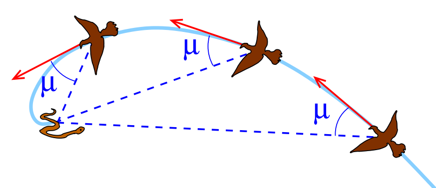
1. Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει υπό την επίδραση του βάρους mg και δύναμης αντίστασης μέτρου λv^2.
(α) Ποιες οι μονάδες του λ συναρτήσει των θεμελιωδών;
(β) Ποιος συνδυασμός των λ, m, g έχει μονάδες ταχύτητας; Σε τι μπορεί να αντιστοιχεί;
(γ) Ποια χρονική κλίμακα ορίζεται από τα λ, m, g; Σε τι μπορεί να αντιστοιχεί;
(δ) Σε τι μπορεί να αντιστοιχεί το μήκος που ορίζεται από τα λ, m, g;

---

2. Έστω κίνηση σώματος μάζας m με σταθερό μέτρο ταχύτητας v και σταθερή στροφορμή ως προς την αρχή συντεταγμένων Ο. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στην θέση $\vec{r}|_{t=0} = b\hat{x}$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}|_{t=0} = v\hat{y}$, όπου b θετική σταθερά.
(α) Ποια η σταθερή στροφορμή του σώματος ως προς το Ο; Δείξτε ότι το σώμα κινείται στο επίπεδο Oxy.
(β) Βρείτε πως αλλάζουν με τον χρόνο οι πολικές συντεταγμένες του σώματος.
(γ) Βρείτε την επιτάχυνση σε κάθε χρόνο.
(δ) Ποια η θέση σε καρτεσιανές συντεταγμένες;

---

3. Τα γεράκια βλέπουν καλύτερα σε γωνία μ ως προς τον άξονα του κεφαλιού τους. Όταν πετούν προς ένα στόχο, για να μην γέρνουν το κεφάλι τους – κάτι που θα μείωνε την αεροδυναμική επίδοση της πτήσης – πετούν με τρόπο ώστε όλο τους το σώμα και συνεπώς και η ταχύτητά τους να σχηματίζει συνεχώς σταθερή γωνία μ με την ευθεία προς τον στόχο.



Έστω αγνοούμε την κατακόρυφη κίνηση.
(α) Δείξτε ότι η τροχιά τους σε πολικές συντεταγμένες με αρχή τον στόχο είναι λογαριθμική σπείρα $\varpi = \varpi_0 e^{-\phi \cot \mu}$. (Η σπείρα αυτή λέγεται και ισογώνια, ακριβώς διότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας παραμένει σταθερή.)
(β) Βρείτε σε κάθε θέση τα μοναδιαία πάνω και κάθετα στην τροχιά (τα $\hat{\varepsilon}$, $\hat{n}$) και την ακτίνα καμπυλότητας. Δίνονται οι σχέσεις $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\mathcal{R}}$, $\dot{\hat{\varpi}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ και $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\varpi}$.
(γ) Ένα γεράκι μάζας m βρίσκεται αρχικά στο σημείο $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, έχει αρχική ταχύτητα v_0 και η μόνη δύναμη που του ασκείται στην διεύθυνση της ταχύτητας είναι αντίσταση αέρα με μέτρο mkv^2 (όπου k σταθερά και v η ταχύτητα).
(γ_1) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε χρόνο;
(γ_2) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στον στόχο ($\varpi = 0$);
(γ_3) Του ασκείται άλλη οριζόντια δύναμη;
(δ) Έστω λαμβάνουμε υπόψη την κατακόρυφη κίνηση και θεωρούμε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες με αρχή τον στόχο και κατακόρυφο άξονα $\hat{z}$ η κίνηση γίνεται σε κώνο $\theta =$ σταθερά. Η αρχική θέση ενός γερακιού είναι $r = r_0$, $\phi = 0$.
Βρείτε την τριδιάστατη τροχιά του.
Αν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με v σε πόσο χρόνο θα φτάσει στον στόχο;

Λύσεις – Εργασία #1

1. (α) Η σταθερά λ έχει μονάδες δύναμη ανά τετράγωνο ταχύτητας. Συγκρίνοντας με την σχέση $F_{\text{κεντρομόλος}} = mv^2/r$ (δεν σχετίζεται με το πρόβλημά μας, απλά για να δούμε εύκολα τις διαστάσεις του λόγου δύναμης ανά τετράγωνο ταχύτητας) συμπεραίνουμε ότι $[\lambda] = [M]/[L]$, δηλ. έχει μονάδες μάζα ανά μήκος.
Αλλιώς: $[\lambda] = \dfrac{[F]}{[v]^2}$ και αντικαθιστούμε $[F] = [M]\dfrac{[L]}{[T]^2}$ και $[v] = \dfrac{[L]}{[T]}$.
(β) Μια σχέση $U = \lambda^\alpha m^\beta g^\gamma$ συνεπάγεται $\dfrac{[L]}{[T]} = \left(\dfrac{[M]}{[L]}\right)^\alpha [M]^\beta \left(\dfrac{[L]}{[T]^2}\right)^\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = -\alpha+\gamma \text{ (από μήκη)}\,, \\ 0 = \alpha+\beta \text{ (από μάζες)}\,, \\ -1 = -2\gamma \text{ (από χρόνους)}\,, \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} \alpha = -1/2\,, \\ \beta = 1/2\,, \\ \gamma = 1/2\,, \end{array}\right.$ δηλ. ο συνδυασμός $U = \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda}}$ έχει μονάδες ταχύτητας.
Πολύ ευκολότερα προκύπτει το αποτέλεσμα αν παρατηρήσουμε ότι οι mg και λv^2 είναι και οι δύο δυνάμεις, επομένως έχουν ίδιες μονάδες. Άρα $[mg] = [\lambda v^2] \Leftrightarrow [v] = [\sqrt{mg/\lambda}]$.
Η ταχύτητα αυτή πρέπει να σχετίζεται με την οριακή που αποκτά το σώμα κατεβαίνοντας.
Πράγματι είναι ακριβώς η οριακή, η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική συνισταμένη δυνάμεων $mg = \lambda v^2_{\text{οριακή}}$.
(γ) Μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία (δηλ. να βρούμε τα α', β', γ' ώστε να ισχύει $\tau = \lambda^{\alpha'} m^{\beta'} g^{\gamma'}$), αλλά πιο εύκολα να παρατηρήσουμε ότι χρόνο δίνει το πηλίκο ταχύτητα προς επιτάχυνση και να χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα που βρήκαμε στο (β) και την επιτάχυνση βαρύτητας, δηλ. $\tau = \dfrac{U}{g} = \sqrt{\dfrac{m}{\lambda g}}$.
Ο χρόνος τ πρέπει να σχετίζεται με τον χρόνο που χρειάζεται το σώμα να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα.
Πράγματι η εξίσωση κίνησης $m\dot{v} = mg - \lambda v^2$ είναι χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνεται $\displaystyle\int \frac{m\,dv}{mg-\lambda v^2} = \int dt \Leftrightarrow \int \frac{d(v/U)}{1-(v/U)^2} = \int \frac{dt}{\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+v/U}{1-v/U}\right| = \frac{1}{2}\ln|C| + \frac{t}{\tau} \Leftrightarrow \frac{1+v/U}{1-v/U} = Ce^{2t/\tau}$.
Από την αρχική συνθήκη $v|_{t=0} = 0$ η σταθερά ολοκλήρωσης προκύπτει $C = 1$, οπότε $\dfrac{1+v/U}{1-v/U} = e^{2t/\tau} \Leftrightarrow$ $v = U\tanh\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$, δηλ. η ταχύτητα πλησιάζει εκθετικά την οριακή τιμή U και σε χρόνο κλίμακας μερικών τ πρακτικά την φτάνει.
(δ) Το μήκος $L = U\tau = \dfrac{m}{\lambda}$ πρέπει να σχετίζεται με την απόσταση που χρειάζεται το σώμα να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα.
Πράγματι η εξίσωση κίνησης $m\dot{v} = mg - \lambda v^2$, με $\dot{v} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}$ προσδιορίζει την σχέση ταχύτητας–μήκους μέσω της διαφορικής εξίσωσης $mv\dfrac{dv}{ds} = mg - \lambda v^2$, η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνεται $\displaystyle\int \frac{mv\,dv}{mg-\lambda v^2} = \int ds \Leftrightarrow \int \frac{d(mg-\lambda v^2)}{mg-\lambda v^2} = -\frac{2\lambda}{m}\int ds \Leftrightarrow \ln\left|mg-\lambda v^2\right| - \ln|D| = -\frac{2\lambda}{m}s \Leftrightarrow$ $mg - \lambda v^2 = De^{-2s/L}$. Από την αρχική συνθήκη $v|_{s=0} = 0$ η σταθερά ολοκλήρωσης προκύπτει $D = mg$, οπότε προκύπτει $v = U\sqrt{1-e^{-2s/L}}$, δηλ. η ταχύτητα πλησιάζει εκθετικά την οριακή τιμή U και σε απόσταση κλίμακας μερικών $L = U\tau$ πρακτικά την φτάνει.

---

2. (α) Η (σταθερή) στροφορμή μπορεί να υπολογιστεί στην αρχική θέση $\vec{L} = b\hat{x} \times mv\hat{y} = mvb\,\hat{z}$.
Σε κάθε θέση ισχύει $\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L} = mvb\hat{z}$. Άρα το διάνυσμα θέσης είναι κάθετο στο $\hat{z}$ και αφού ξεκινά από την αρχή των αξόνων βρίσκεται πάντα στο επίπεδο $z = 0$.
Γενικά ισχύει $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$. Όταν η στροφορμή είναι σταθερή αυτή είναι εξίσωση επιπέδου κάθετου στο διάνυσμα $\vec{L}$, που περνά από την αρχή των αξόνων. Εδώ $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow mvbz = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(β) Ισχύουν $\varpi^2\dot{\phi} = \dfrac{L}{m} = vb$ και $\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2 = v^2$. Η πρώτη δίνει $\dot{\phi} = \dfrac{vb}{\varpi^2}$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη προκύπτει η διαφορική εξίσωση $\dot{\varpi} = \pm v\dfrac{\sqrt{\varpi^2 - b^2}}{\varpi}$.

• Μια περίπτωση είναι συνεχώς να ισχύει $\varpi = b$, οπότε $\dot{\phi} = \dfrac{v}{b} \Rightarrow \phi = \dfrac{vt}{b}$ (διότι αρχικά $\phi = 0$). Δηλ. η κίνηση είναι ομαλή κυκλική και οι πολικές συντεταγμένες είναι $\varpi = b$, $\phi = \dfrac{vt}{b}$.

• Αν δεν ισχύει συνεχώς $\varpi = b$ τότε μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές στην διαφορική εξίσωση (επιτρέπεται να διαιρέσουμε με $\sqrt{\varpi^2 - b^2} \neq 0$), οπότε $\displaystyle\int \frac{\varpi\, d\varpi}{\sqrt{\varpi^2 - b^2}} = \pm \int v\, dt \Leftrightarrow \sqrt{\varpi^2 - b^2} = \pm(vt + C) \Leftrightarrow$ $\varpi = \sqrt{b^2 + (vt + C)^2}$. Από αρχικές συνθήκες $\varpi|_{t=0} = b$, οπότε $C = 0$ και άρα $\varpi = \sqrt{b^2 + v^2t^2}$.
Ολοκληρώνοντας την $\dot{\phi} = \dfrac{vb}{\varpi^2} = \dfrac{vb}{b^2 + v^2t^2}$ προκύπτει $\phi = \displaystyle\int \frac{vb\, dt}{b^2 + v^2t^2} = \arctan\frac{vt}{b} + D$. Από αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = 0$, οπότε $D = 0$ και άρα $\phi = \arctan\dfrac{vt}{b}$.
Στην περίπτωση αυτή λοιπόν οι πολικές συντεταγμένες είναι $\varpi = \sqrt{b^2 + v^2t^2}$, $\phi = \arctan\dfrac{vt}{b}$.

(γ) $a_\phi = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = 0$ και $a_\varpi = \ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2$.

• Στην περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης προκύπτει $a_\varpi = -\dfrac{v^2}{b}$ (κεντρομόλος).

• Στην δεύτερη περίπτωση προκύπτει $a_\varpi = 0$, δηλ. $\vec{a} = 0$ και άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη και ομαλή!

(δ) Οι καρτεσιανές συνδέονται με τις πολικές μέσω των $x = \varpi\cos\phi$ και $y = \varpi\sin\phi$.

• Στην περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης $x = b\cos(vt/b)$, $y = b\sin(vt/b)$.

• Στην περίπτωση της ευθύγραμμης και ομαλής κίνησης $\varpi = \sqrt{b^2 + v^2t^2}$ και $\phi = \arctan\dfrac{vt}{b} \in [0, \pi/2)$, οπότε $x = \varpi\cos\phi = \varpi\sqrt{\dfrac{1}{\tan^2\phi + 1}} = b$ και $y = \varpi\sin\phi = \varpi\sqrt{\dfrac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi + 1}} = vt$, δηλ. $x = b$ και $y = vt$.
Αναμενόμενο αφού για ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση $\vec{r} = \vec{r}|_{t=0} + \vec{v}|_{t=0}t = b\hat{x} + vt\hat{y}$.
Αν δουλεύαμε εξ αρχής σε καρτεσιανές:
Η στροφορμή είναι $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\hat{z}$, η παράγωγος της $\dot{\vec{L}} = m(x\ddot{y} - y\ddot{x})\hat{z}$ και $\dot{\vec{L}} = 0 \Leftrightarrow x\ddot{y} = y\ddot{x}$.
Το μέτρο της ταχύτητας είναι $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ και $\dot{v} = 0 \Leftrightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με x την τελευταία και αντικαθιστώντας $x\ddot{y} = y\ddot{x}$ βρίσκουμε $(x\dot{x} + y\dot{y})\ddot{x} = 0$.
Ο μηδενισμός του πρώτου όρου $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ δίνει κυκλική κίνηση $x^2 + y^2 =$ σταθερά $= b^2$ από αρχικές συνθήκες (ομαλή κυκλική αφού γνωρίζουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό).
Ο μηδενισμός του δεύτερου όρου $\ddot{x} = 0$, μαζί με την $x\ddot{y} = y\ddot{x}$ που δίνει $\ddot{y} = 0$ (ή $x = 0$ που είναι μια υποπερίπτωση που δεν συμβαδίζει με τις αρχικές συνθήκες) αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.
Γενικά, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και μέσω επιτρόχιας–κεντρομόλου:
Αφού $\dot{v} = 0$ η επιτάχυνση είναι μόνο κεντρομόλος, δηλ. $\vec{a} = (v^2/\mathcal{R})\hat{n}$. Η σταθερότητα της στροφορμής δίνει $\dot{\vec{L}} = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \times \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\mathcal{R}}\vec{r} \times \hat{n} = 0$. Επομένως έχουμε δύο περιπτώσεις: Είτε $\dfrac{1}{\mathcal{R}} = 0$ δηλ. ευθύγραμμη κίνηση (και ομαλή αφού $\dot{v} = 0$), είτε $\vec{r} \times \hat{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow r^2 =$ σταθερά, δηλ. κυκλική κίνηση (και ομαλή αφού $\dot{v} = 0$).

---

3. (α) Είναι $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi}$ και $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$. Θεωρώντας άξονες στους οποίους η γωνία ϕ αυξάνεται καθώς το ϖ μειώνεται – θα μπορούσαμε να επιλέγαμε τους άξονες ώστε να συμβαίνει το αντίθετο) οι ακτινική και αζιμουθιακή συνιστώσες της ταχύτητας είναι (με τη βοήθεια του σχήματος) $v_\varpi = -v\cos\mu$ και $v_\phi = v\sin\mu$, δηλ. ισχύει $\dot{\varpi} = -v\cos\mu$ και $\varpi\dot{\phi} = v\sin\mu$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\dfrac{\dot{\varpi}}{\varpi\dot{\phi}} = -\cot\mu$,

δηλ. $\dfrac{d\varpi}{\varpi d\phi} = -\cot\mu \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{d\varpi}{\varpi} = -\cot\mu \int d\phi \Leftrightarrow \ln\varpi = -\phi\cot\mu + \mathcal{C} \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0 e^{-\phi\cot\mu}$, όπου $\mathcal{C} = \ln\varpi_0$ σταθερά ολοκλήρωσης (η οποία ισούται με τον λογάριθμο της απόστασης από το κέντρο όταν η γωνία είναι $\phi = 0$).

Αλλιώς: Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία μεταξύ $\vec{r}$ και $\vec{v}$ είναι $\pi - \mu$, άρα $\cos(\pi-\mu) = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|\,|\vec{v}|} \Leftrightarrow -\cos\mu = \dfrac{\varpi\dot{\varpi}}{\varpi\sqrt{\dot{\varpi}^2 + (\varpi\dot{\phi})^2}} \Leftrightarrow \left|\dfrac{\dot{\varpi}}{\varpi\dot{\phi}}\right| = \cot\mu \Leftrightarrow \left|\dfrac{d\varpi}{\varpi d\phi}\right| = \cot\mu$. Επιλέγοντας όπως πριν άξονες στους οποίους η γωνία ϕ αυξάνεται καθώς η ακτίνα μειώνεται, προκύπτει $\dfrac{d\varpi}{\varpi d\phi} = -\cot\mu$ και συνεχίζουμε όπως πριν.

(β) Με $\varpi = \varpi_0 e^{-\phi\cot\mu}$ είναι $\dot{\varpi} = -\varpi\dot{\phi}\cot\mu$, και $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} = \varpi\dot{\phi}\left(-\cot\mu\hat{\varpi} + \hat{\phi}\right)$. Άρα $v = |\vec{v}| = \dfrac{\varpi\dot{\phi}}{\sin\mu}$ και $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{v} = -\cos\mu\hat{\varpi} + \sin\mu\hat{\phi}$.

Από $\dfrac{\hat{n}}{\mathcal{R}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds}$, με $\dfrac{d}{ds} = \dfrac{d}{v\,dt}$, $\dot{\hat{\varpi}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ και $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\varpi}$ βρίσκουμε $\dfrac{\hat{n}}{\mathcal{R}} = \dfrac{\sin\mu}{\varpi}\left(-\sin\mu\hat{\varpi} - \cos\mu\hat{\phi}\right)$. Άρα $\hat{n} = -\sin\mu\hat{\varpi} - \cos\mu\hat{\phi}$ και $\mathcal{R} = \dfrac{\varpi_0}{\sin\mu}e^{-\phi\cot\mu}$.

Αλλιώς: $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}\left[v\left(-\cos\mu\hat{\varpi} + \sin\mu\hat{\phi}\right)\right] = \dot{v}\left(-\cos\mu\hat{\varpi} + \sin\mu\hat{\phi}\right) + v\dot{\phi}\left(-\sin\mu\hat{\varpi} - \cos\mu\hat{\phi}\right)$, $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = \vec{a} - \dot{v}\hat{\varepsilon} = v\dot{\phi}\left(-\sin\mu\hat{\varpi} - \cos\mu\hat{\phi}\right)$, άρα $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|} = -\sin\mu\hat{\varpi} - \cos\mu\hat{\phi}$ και $|\vec{a}_\kappa| = \dfrac{v^2}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \dfrac{v}{\dot{\phi}} = \dfrac{\varpi}{\sin\mu}$.

(γ_1) Η επιτρόχια συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $m\dot{v} = -mkv^2 \Leftrightarrow -\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = k\int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$.

(γ_2) Η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι $\dot{\varpi} = -v\cos\mu = -\dfrac{v_0\cos\mu}{1+kv_0t}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την απόσταση σε κάθε χρόνο $\displaystyle\int_{\varpi_0}^{\varpi} d\varpi = \int_0^t \frac{-v_0\cos\mu}{1+kv_0t}dt \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0 - \frac{\cos\mu}{k}\ln(1+kv_0t)$.

Το γεράκι φτάνει στον στόχο όταν $\varpi = 0 \Leftrightarrow \dfrac{k\varpi_0}{\cos\mu} = \ln(1+kv_0t) \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{kv_0}\left(e^{k\varpi_0/\cos\mu} - 1\right)$.

(γ_3) Το γεράκι εκτελεί καμπύλη τροχιά, άρα του ασκείται δύναμη που παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου $\vec{F} = \dfrac{mv^2}{\mathcal{R}}\hat{n} = \dfrac{mv^2\sin\mu}{\varpi}(-\sin\mu\hat{\varpi} - \cos\mu\hat{\phi})$.

(δ) Είναι $\vec{r} = r\hat{r}$ και $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$ (η θ συνιστώσα της ταχύτητας $r\dot{\theta}$ μηδενίζεται αφού η θ είναι σταθερή). Θεωρώντας ότι η ϕ αυξάνει καθώς η απόσταση r μειώνεται, οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $v_r = -v\cos\mu$ και $v_\phi = v\sin\mu$, ή, $\dot{r} = -v\cos\mu$ και $r\sin\theta\dot{\phi} = v\sin\mu$. Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $\dfrac{dr}{r\sin\theta\,d\phi} = -\cot\mu$.

Η σχέση αυτή προκύπτει και μέσω της $\cos(\pi-\mu) = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\sin\theta\dot{\phi})^2}} \Leftrightarrow \left|\dfrac{\dot{r}}{r\sin\theta\dot{\phi}}\right| = \cot\mu$.

Ολοκληρώνοντας $\displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = -\sin\theta\cot\mu\int_0^\phi d\phi \Leftrightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\phi\sin\theta\cot\mu \Leftrightarrow r = r_0 e^{-\phi\sin\theta\cot\mu}$, δηλ. προκύπτει ξανά σπείρα (πάνω στον κώνο $\theta =$ σταθερό).

Είναι $v = \sqrt{(r\sin\theta\cot\mu\,\dot{\phi})^2 + (r\sin\theta\,\dot{\phi})^2} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\mu}r_0 e^{-\phi\sin\theta\cot\mu}\dot{\phi} \Leftrightarrow \dfrac{\sin\theta}{\sin\mu}r_0\displaystyle\int_0^\phi e^{-\phi\sin\theta\cot\mu}d\phi = \int_0^t v\,dt \Leftrightarrow r_0e^{-\phi\sin\theta\cot\mu} = r_0 - vt\cos\mu$. Άρα $r = r_0 - vt\cos\mu$ και το γεράκι φτάνει στον στόχο όταν $r = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{r_0}{v\cos\mu}$.