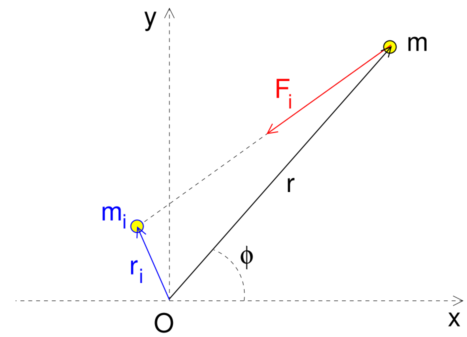
Μηχανική Ι – Εργασία #7

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 Ν. Βλαχάκης

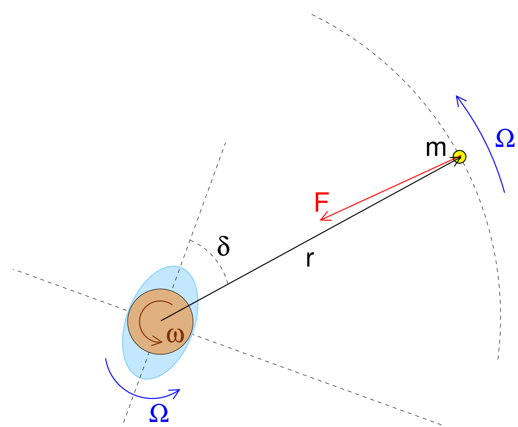
1. Η μάζα m_i βρίσκεται σε σημείο $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ και ασκεί βαρυτική δύναμη στην m, η οποία βρίσκεται στο σημείο $\vec{r} = r\cos\phi\,\hat{x} + r\sin\phi\,\hat{y}$.
(α) Ποια η ροπή ως προς το O που ασκεί η m_i στην m;
(β) Αν υπάρχουν πολλές μάζες m_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, O είναι το κέντρο μάζας τους και η m βρίσκεται μακρυά από το O, δηλ. ισχύει $r \gg |\vec{r}_i|$ για όλα τα i, δείξτε ότι η συνολική ροπή είναι προσεγγιστικά $\vec{N} = \dfrac{3Gm}{r^5}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{r}\cdot\vec{r}_i)\,(\vec{r}\times\vec{r}_i)$.



(γ) Αν οι μάζες είναι συμμετρικά κατανεμημένες ώστε για κάθε m_i στο σημείο $x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z}$ να υπάρχει ίση μάζα στα σημεία $-x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z}$ και $x_i\hat{x}+y_i\hat{y}-z_i\hat{z}$, δείξτε ότι η συνολική ροπή είναι $\vec{N} = \hat{z}\dfrac{3Gm\Delta I\,\sin(2\phi)}{2r^3}$, όπου $\Delta I = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(y_i^2 - x_i^2\right)$.

Υπόδειξη: Για $r \gg |\vec{r}_i|$ είναι $|\vec{r}-\vec{r}_i|^\nu = (r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}_i + r_i^2)^{\nu/2} \approx r^\nu\left(1 - \nu\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2}\right)$.

2. Λόγω των παλιρροϊκών δυνάμεων από τη Σελήνη, τα νερά των ωκεανών αποκτούν ελλειψοειδές σχήμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της Γης με την γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη Ω. Η Γη περιστρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα $\omega > \Omega$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, λόγω τριβών, ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς σε κάθε χρόνο να προηγείται κατά σταθερή γωνία δ της ευθείας Γης–Σελήνης (όπως θα μελετηθεί στην 3η άσκηση).
(α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της 1ης άσκησης δείξτε ότι η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής της Σελήνης συνεπάγεται $\dfrac{d(r^2\Omega)}{dt} = \dfrac{3G\Delta I\,\sin(2\delta)}{2r^3}$.



(β) Θεωρήστε την τροχιά της Σελήνης κυκλική με πολύ αργά μεταβαλλόμενη ακτίνα. Συνδυάζοντας την προηγούμενη εξίσωση με το νόμο Kepler βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας r.
(γ) Τι επίδραση έχει αυτό το φαινόμενο στην διάρκεια της ημέρας;

3. Έστω μια μάζα m_i νερού στον ωκεανό (σε απόσταση R από το κέντρο της Γης) στην οποία επιδρά η παλιρροϊκή δύναμη από την Σελήνη. Σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο της Γης, η μάζα m_i βρίσκεται στην θέση $\vec{r}_i = R\cos\phi\hat{x} + R\sin\phi\hat{y}$ και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$, η Γη περιστρέφεται με ω και η Σελήνη έχει μάζα m και θέση $\vec{r} = r\cos(\Omega t)\hat{x} + r\sin(\Omega t)\hat{y}$ (θεωρούμε ομαλή κυκλική την κίνησή της γύρω από τη Γη, με $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$).
(α) Ποια η ροπή ως προς το κέντρο της Γης της παλιρροϊκής δύναμης που ασκεί η Σελήνη στην μάζα m_i;
(β) Στην μάζα m_i ασκείται επιπλέον δύναμη αντίστασης ανάλογη της σχετικής ταχύτητας του νερού ως προς τον πυθμένα του ωκεανού, δηλ. $\vec{F}_\phi = -\lambda m_i(R\dot{\phi} - R\omega)\hat{\phi}$. Γράψτε την $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής για την μάζα m_i και αναζητήστε λύση $\phi = \Omega t + \delta$ με σταθερό δ.

Λύσεις – Εργασία #7

1. (α) $\vec{F} = -\dfrac{Gmm_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$ και $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = -\dfrac{Gmm_i\vec{r}\times(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = \dfrac{Gmm_i\vec{r}\times\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$.
(β) Με $|\vec{r}-\vec{r}_i|^{-3} \approx r^{-3}\left(1+3\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2}\right)$ (σύμφωνα με την υπόδειξη) είναι $\vec{N} = \dfrac{Gm}{r^3}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(1+3\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2}\right)(\vec{r}\times\vec{r}_i)$.
Λόγω της $\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = 0$ (που ισχύει αφού το O είναι το κέντρο μάζας των μαζών m_i) προκύπτει η ζητούμενη.
(γ) Σε καρτεσιανές, θέτοντας $\vec{r}_i = x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z}$ και $\vec{r} = r\cos\phi\,\hat{x}+r\sin\phi\,\hat{y}$, προκύπτει $(\vec{r}\cdot\vec{r}_i)(\vec{r}\times\vec{r}_i) = r^2(x_i\cos\phi+y_i\sin\phi)\left[(y_i\cos\phi-x_i\sin\phi)\,\hat{z}+z_i(\sin\phi\,\hat{x}-\cos\phi\,\hat{y})\right]$. Λόγω της συμμετρίας της κατανομής οι όροι που είναι περιττοί ως προς x_i και z_i δεν συνεισφέρουν στο άθροισμα και προκύπτει η ζητούμενη.

---

2. (α) Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής είναι $\dfrac{m}{r}\dfrac{d(r^2\Omega)}{dt} = F_\phi$, όπου $\Omega = \dot{\phi}$. Ισοδύναμα $\dfrac{dL_z}{dt} = N_z$, όπου $L_z = mr^2\Omega$ και $N_z = rF_\phi$ (κάτι που αποτελεί την $\hat{z}$ συνιστώσα της σχέσης $\dot{\vec{L}} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}$).
Αντικαθιστώντας $N_z = \dfrac{3Gm\Delta I\,\sin(2\phi)}{2r^3}$ με $\phi = \dfrac{\pi}{2}-\delta$ (θεωρώ στο περιστρεφόμενο σύστημα του σχήματος άξονα $\hat{y}$ πάνω στον μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς οπότε και $\Delta I > 0$) βρίσκουμε την ζητούμενη εξίσωση $\dfrac{d(r^2\Omega)}{dt} = \dfrac{3G\Delta I\,\sin(2\delta)}{2r^3}$.
(β) Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη τον νόμο Kepler $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$ (για περίπου κυκλική τροχιά οι κυρίαρχοι όροι στην ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνουν $-m\dot{\phi}^2 r = -GMm/r^2$) βρίσκουμε $\dfrac{d\sqrt{GMr}}{dt} = \dfrac{3G\Delta I\,\sin(2\delta)}{2r^3} \Leftrightarrow \dot{r} = \dfrac{3\sqrt{G/M}\,\Delta I\,\sin(2\delta)}{r^{5/2}}$, δηλ. η Σελήνη κερδίζει στροφορμή, απομακρύνεται και περιφέρεται πιο αργά γύρω από την Γη (το $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$ ελαττώνεται καθώς το r αυξάνεται).
Έχει μετρηθεί με το Lunar Laser Ranging experiment ότι η Σελήνη απομακρύνεται 3.8 cm κάθε χρόνο. Καθώς απομακρύνεται αλλάζει η παλιρροϊκή επίδρασή του στους ωκεανούς, δηλ. αλλάζουν τα ΔI και δ, οπότε δεν είναι τετριμμένο να ολοκληρώσουμε την προηγούμενη εξίσωση.
(γ) Λόγω διατήρησης στροφορμής η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης μειώνεται με τον χρόνο (αυτό φαίνεται και από το ότι η Σελήνη ασκεί στην Γη την αντίθετη ροπή $-N_z$), δηλ. η διάρκεια της ημέρας αυξάνεται.
Η συνολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή $L_{\text{ολική}} = I_{\text{Γης}}\omega + mr^2\Omega$, όπου $I_{\text{Γης}}$ η ροπή αδράνειας της Γης. Θέτοντας $\omega = 2\pi/T_{\text{Γης}}$, $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$ και παραγωγίζοντας βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της διάρκειας της ημέρας $\dot{T}_{\text{Γης}} = \dfrac{3m\Omega^2 T_{\text{Γης}}^2\Delta I\,\sin(2\delta)}{4\pi M I_{\text{Γης}}}$.
Έχει μετρηθεί με ατομικά ρολόγια ότι η διάρκεια της ημέρας αυξάνει κατά 1.7 χιλιοστά του δευτερολέπτου ανά αιώνα (π.χ. `https://www.scientificamerican.com/article/earth-rotation-summer-solstice/`).
Η μείωση του ω θα συνεχιστεί μέχρις ότου οι δύο γωνιακές ταχύτητες εξισωθούν (όταν $\Omega = \omega$, δηλ. η Σελήνη βρίσκεται συνεχώς πάνω από ένα τόπο της Γης, ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς θα πάψει να προηγείται της ευθείας Γης–Σελήνης και θα σταματήσει να ασκείται ροπή). Η συνολική στροφορμή του συστήματος γράφεται και $L_{\text{ολική}} = I_{\text{Γης}}\omega + m(G^2M^2/\Omega)^{1/3}$ (αφού $r = (GM/\Omega^2)^{1/3}$ από το νόμο Kepler). Χρησιμοποιώντας τις τωρινές τιμές μπορούμε να βρούμε την τιμή της σταθεράς $L_{\text{ολική}}$ και την κοινή γωνιακή ταχύτητα στην οποία θα καταλήξει το σύστημα, η οποία προκύπτει ~ 47 φορές μικρότερη από την τωρινή ω, δηλ. η ημέρα θα γίνει ~ 47 φορές μεγαλύτερη από την τωρινή (δείτε και 4ο θέμα εξέτασης 22/2/2010). Βέβαια η διαδικασία είναι πολύ αργή (η χρονική κλίμακα εξαρτάται από τις τριβές μεταξύ ωκεανών και στερεάς Γης, οι οποίες καθορίζουν την γωνία δ, αλλά και από την ασυμμετρία των δύο αξόνων του ελλειψοειδούς που

εκφράζεται μέσω της ΔI)· πριν εξισωθούν οι γωνιακές ταχύτητες μπορεί ακόμα και ο Ήλιος να βρίσκεται στο τέλος της ζωής του, να έχει γίνει ερυθρός γίγαντας και να έχει καταπιεί την Γη και την Σελήνη.

---

3. (α) Η ένταση του παλιρροϊκού πεδίου της Σελήνης στην θέση $\vec{r}_i$ είναι $\vec{g}_{\text{παλ}} = -\dfrac{Gm(\vec{r}_i - \vec{r})}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} + \dfrac{Gm(-\vec{r})}{r^3}$ (αφαιρούμε την ένταση του πεδίου βαρύτητας της Σελήνης στο κέντρο της Γης). Η ροπή της αντίστοιχης δύναμης ως προς το κέντρο της Γης είναι $\vec{N}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_{\text{παλ}} = \dfrac{Gmm_i}{r^3}\left(\dfrac{r^3}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} - 1\right)(\vec{r}_i \times \vec{r})$. Θέτοντας $\dfrac{r^3}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} \approx 1 + 3\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2}$ (σύμφωνα με την υπόδειξη της 1ης άσκησης) βρίσκουμε $\vec{N}_i = \dfrac{3Gmm_i}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{r}_i)(\vec{r}_i \times \vec{r})$. Αντικαθιστώντας $\vec{r}_i = R\cos\phi\hat{x} + R\sin\phi\hat{y}$ και $\vec{r} = r\cos(\Omega t)\hat{x} + r\sin(\Omega t)\hat{y}$ το αποτέλεσμα γράφεται $\vec{N}_i = -\dfrac{3mm_i\Omega^2 R^2}{2M}\sin(2\phi - 2\Omega t)\,\hat{z}$ (χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$ και θέτοντας $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$ όπου M η μάζα της Γης).

(β) Η ροπή της αντίστασης είναι $r_i F_\phi \hat{z} = -\lambda m_i R^2(\dot{\phi} - \omega)\hat{z}$.

Άλλες ροπές ως προς το κέντρο της Γης (εκτός αυτών που οφείλονται στην αντίσταση και στην παλιρροϊκή δύναμη από τη Σελήνη) δεν ασκούνται στην m_i (το βάρος από τη Γη $-GMm_i\vec{r}_i/R^3$ έχει μηδενική ροπή). Επομένως, η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής για την μάζα m_i, η οποία είναι ισοδύναμη με την $\dot{L}_z = N_z$, είναι $m_i R^2\ddot{\phi} = -\dfrac{3mm_i\Omega^2 R^2}{2M}\sin(2\phi - 2\Omega t) - \lambda m_i R^2(\dot{\phi} - \omega)$.

Θέτοντας $\phi = \Omega t + \delta$ (ουσιαστικά μεταβαίνοντας σε άξονες που περιστρέφονται μαζί με την Σελήνη) προκύπτει εξίσωση εκκρεμούς με απόσβεση στο οποίο ασκείται σταθερή ροπή, $\ddot{\delta} + \lambda\dot{\delta} + \dfrac{3m\Omega^2}{2M}\sin(2\delta) = \lambda(\omega - \Omega)$.

Η θέση ισορροπίας είναι το σταθερό $\delta = \dfrac{1}{2}\arcsin\left[\dfrac{2M\lambda(\omega-\Omega)}{3m\Omega^2}\right]$ (θετικό όταν $\omega > \Omega$).

Ο συνδυασμός της σχέσης αυτής με την προηγούμενη άσκηση (συγκεκριμένα την σχέση για το $\dot{r}$ και την σταθερότητα του $L_{\text{ολική}}$) και την 3η άσκηση από την 7η εργασία 2018-2019 (η οποία καθορίζει τους ημιάξονες του ελλειψοειδούς, άρα και το ΔI, συναρτήσει της απόστασης Γης–Σελήνης) μας επιτρέπει να καθορίσουμε την χρονική εξέλιξη του συστήματος (των r, ω, Ω) αν γνωρίζουμε την «παράμετρο» λ. Στην πραγματικότητα ο υπολογισμός των απωλειών ενέργειας λόγω της τριβής του νερού των ωκεανών με τον στερεό φλοιό της Γης και την δημιουργία κυμάτων είναι ένα δύσκολο πρόβλημα δυναμικής ρευστών και η «παράμετρος» λ είναι συνάρτηση των χαρακτηριστικών των ροών αυτών.
