Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 Ν. Βλαχάκης

---

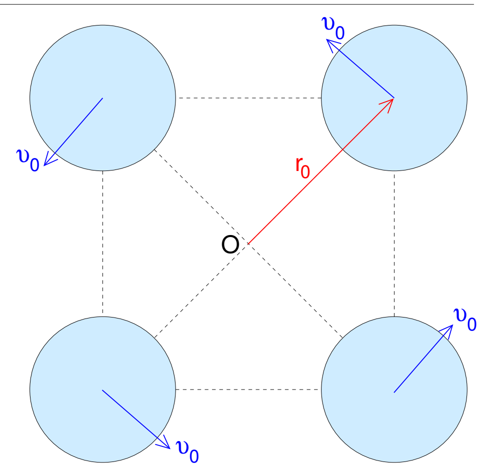
1. Από πύργο ύψους h πάνω από την επιφάνεια της (θεωρούμενης ακίνητης) Γης πετάμε οριζόντια ένα σώμα με ταχύτητα υ_0. Ζητείται για ποιες τιμές της υ_0 θα συμβούν τα ακόλουθα:
(α) Το σώμα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης ακολουθώντας υπερβολική τροχιά.
(β) Το σώμα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης ακολουθώντας παραβολική τροχιά.
(γ) Το σώμα θα περιστρέφεται γύρω από τη Γη με το περίγειο της ελλειπτικής τροχιάς στην αρχική θέση.
(δ) Το σώμα θα περιστρέφεται ακολουθώντας κυκλική τροχιά.
(ε) Το σώμα θα περιστρέφεται γύρω από τη Γη με το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς στην αρχική θέση.
(στ) Το σώμα θα πέσει στη Γη.
(ζ) Ποια η εκκεντρότητα της τροχιάς σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις;
Η μάζα M και η ακτίνα της Γης R, το ύψος h και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G θεωρούνται γνωστά.

---

2. Σημειακό φορτίο μάζας m_1 είναι στερεωμένο σε σημείο Ο. Δεύτερο ετερώνυμο σημειακό φορτίο μάζας m_2 κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_0 σε κύκλο ακτίνας r_0 γύρω από το Ο, υπό την επίδραση της ελκτικής δύναμης Coulomb από το m_1.
(α) Αν η ελκτική δύναμη μεταξύ των φορτίων όταν βρίσκονται σε απόσταση r είναι $-\dfrac{k}{r^2}$, ποια η σταθερά k;
(β) Από την στιγμή $t = 0$ και μετά το πρώτο φορτίο παύει να είναι στερεωμένο, δηλ. είναι ελεύθερο να κινηθεί υπό την επίδραση της δύναμης Coulomb από το m_2. Δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις στα φορτία εκτός της δύναμης Coulomb μεταξύ τους.
Έστω η κίνηση γίνεται στο επίπεδο Oxy και την στιγμή $t = 0$ το m_1 βρίσκεται ακίνητο στην αρχή του συστήματος Ο ενώ το m_2 έχει θέση $r_0\hat{x}$ και ταχύτητα $\upsilon_0\hat{y}$.
(β_1) Ποια η κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος;
(β_2) Ποια η τροχιά του m_2 ως προς το m_1;

---

3. Τα κέντρα τεσσάρων σφαιρικών, ομογενών σωμάτων μάζας m και ακτίνας R που αλληλεπιδρούν βαρυτικά, βρίσκονται αρχικά στις κορυφές νοητού τετραγώνου πλευράς $4R$ (και ημιδιαγωνίου $r_0 = \sqrt{8}R$).



(α) Έστω αρχικά τα σώματα είναι ακίνητα ($\upsilon_0 = 0$).
(α_1) Ποια εξίσωση καθορίζει την απόσταση $r(t)$ του κέντρου κάθε σώματος από το κέντρο μάζας Ο;
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι η συνολική δύναμη που δέχεται κάθε σώμα από τα άλλα τρία, συναρτήσει της απόστασης $r(t)$ από το Ο, είναι κεντρική με φορά προς το Ο και μέτρο $\dfrac{k}{r^2}$ με $k = Gm^2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
(α_2) Ποια η ταχύτητα των σωμάτων όταν συγκρουστούν;
(α_3) Σε πόσο χρόνο θα συγκρουστούν;
(β) Έστω αρχικά τα σώματα έχουν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 \perp \vec{r}_0$ όπως στο σχήμα (δεν υπάρχει ιδιοπεριστροφή).
(β_1) Ποια πρέπει να είναι η υ_0 ώστε να μην αλλάζουν οι αποστάσεις μεταξύ των σωμάτων;
(β_2) Ποια η ελάχιστη υ_0 ώστε τα σώματα να μην συγκρουστούν; Ποια η περίοδος κίνησης γι' αυτή την υ_0;
(β_3) Ποια η ελάχιστη υ_0 ώστε το σύστημα να διαλυθεί; Γι' αυτή την υ_0, όταν κάθε μάζα απέχει απόσταση r από το Ο ποιος είναι ο χρόνος και ποια η γωνία ϕ που έχει διαγράψει η επιβατική ακτίνα από το Ο;
Δίνονται $\displaystyle\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} = \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \arccos\sqrt{x}$ και $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{c + 2bx - x^2}} = b\arcsin\frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}} - \sqrt{c + 2bx - x^2}$.

Λύσεις – Εργασία #6

1. Η στροφορμή είναι $L = m(R+h)v_0$, η ενέργεια $E = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{R+h}$ και η ενεργός δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{m(R+h)^2v_0^2}{2r^2} - \dfrac{GMm}{r}$.

(α) Πρέπει $E > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\dfrac{2GM}{R+h}}$.

(β) Πρέπει $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R+h}}$.

(γ) Στο περίγειο και απόγειο της τροχιάς (όπου $\dot{r} = 0$) ισχύει $V_{\text{eff}} = E \Leftrightarrow \dfrac{m(R+h)^2v_0^2}{2r^2} - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{R+h}$. Οι λύσεις του τριωνύμου είναι $r = R+h$ και $r = \dfrac{R+h}{\dfrac{2GM}{v_0^2(R+h)} - 1}$.

Προκύπτουν και συνδυάζοντας διατήρηση στροφορμής και ενέργειας σε απόγειο και περίγειο, δηλ. από την λύση του συστήματος $mrv = m(R+h)v_0$ και $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{R+h}$.

Πρέπει αφενός και οι δύο λύσεις να είναι θετικές, δηλ. $v_0 < \sqrt{\dfrac{2GM}{R+h}}$ (κάτι που ισοδυναμεί με $E < 0$, οπότε η τροχιά είναι ελλειπτική) και αφετέρου η αρχική θέση να αντιστοιχεί στην μικρότερη ακτίνα, δηλ. να ισχύει $R+h < \dfrac{R+h}{\dfrac{2GM}{v_0^2(R+h)} - 1} \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$.

Ένας δεύτερος τρόπος βασίζεται στην εύρεση της εξίσωσης τροχιάς χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $r = R+h$, $\phi = 0$ (αυθαίρετο), $\dot{r} = 0$ και $r\dot{\phi} = v_0$, οπότε $L = m(R+h)v_0$.

Η γενική λύση της $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2} = \dfrac{GM}{(R+h)^2v_0^2}$ είναι $u = \dfrac{GM}{(R+h)^2v_0^2}(1 + C_1\sin\phi + C_2\cos\phi)$. Οι υπόλοιπες αρχικές συνθήκες δίνουν $\dot{r}|_{\phi=0} = 0 \Leftrightarrow u'|_{\phi=0} = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$ και $r|_{\phi=0} = R+h \Leftrightarrow u|_{\phi=0} = \dfrac{1}{R+h} \Leftrightarrow C_2 = \dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} - 1$. Άρα η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{(R+h)^2v_0^2/GM}{1 + \left[\dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} - 1\right]\cos\phi}$.

Για $\cos\phi = \pm 1$ βρίσκουμε τις ακρότατες τιμές του r και συνεχίζουμε όπως πριν.

Ένας τρίτος τρόπος βασίζεται στο διάγραμμα $V_{\text{eff}}(r)$. Πρέπει αφενός η $V_{\text{eff}}(r) = E$ να έχει δύο λύσεις, δηλ. να ισχύει $E < 0$ και αφετέρου η αρχική ακτίνα να είναι η μικρότερη λύση της $V_{\text{eff}}(r) = E$, δηλ. να ισχύει $V'_{\text{eff}}|_{r=R+h} < 0$.

(δ) Πρέπει η δύναμη βαρύτητας να ισούται με την κεντρομόλο, δηλ. $\dfrac{mv_0^2}{R+h} = \dfrac{GMm}{(R+h)^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$.

Μπορεί να δοθεί απάντηση και μέσω των άλλων δύο τρόπων. Με βάση την εξίσωση τροχιάς πρέπει ο συντελεστής του $\cos\phi$ να μηδενίζεται ώστε να είναι $r =$ σταθερό. Με βάση το $V_{\text{eff}}(r)$ πρέπει η ακτίνα να αντιστοιχεί στο ελάχιστο, δηλ. $V'_{\text{eff}}|_{r=R+h} = 0$.

(ε) Για τις ακτίνες που βρέθηκαν στο (γ) πρέπει να ισχύει $R+h > \dfrac{R+h}{\dfrac{2GM}{v_0^2(R+h)} - 1} \Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$.

Αλλιώς: Πρέπει η αρχική ακτίνα $r = R+h$ να είναι η μεγαλύτερη λύση της $V_{\text{eff}}(r) = E$, δηλ. να ισχύει $V'_{\text{eff}}|_{r=R+h} > 0$.

(στ) Πρέπει η ελάχιστη ακτίνα (περίγειο) να είναι μικρότερη της ακτίνας της Γης, δηλ. $\dfrac{R+h}{\dfrac{2GM}{v_0^2(R+h)}-1} < R \Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\dfrac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}}$.

Αλλιώς: Πρέπει η ακτίνα $r = R$ να είναι μέσα στην επιτρεπτή περιοχή κίνησης, δηλ. $V_{\text{eff}}(R) < E$.

(ζ) Από $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ προκύπτει $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{(R+h)^2 v_0^2}{G^2M^2}\left(v_0^2 - \dfrac{2GM}{R+h}\right)} = \left|\dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} - 1\right|$.

Αυτό φαίνεται και από την εξίσωση τροχιάς που βρέθηκε $r = \dfrac{(R+h)^2 v_0^2/GM}{1 + \left[\dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} - 1\right]\cos\phi}$.

Στην (α) είναι $\varepsilon = \dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} - 1 > 1$, στην (β) είναι $\varepsilon = 1$, στην (γ) είναι $\varepsilon = \dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} - 1 < 1$, στην (δ) είναι $\varepsilon = 0$, στην (ε) είναι $\varepsilon = 1 - \dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} < 1$ και στην (στ) είναι $\varepsilon = 1 - \dfrac{(R+h)v_0^2}{GM} < \dfrac{h}{2R+h}$.

Στην τελευταία περίπτωση η ανισότητα μπορεί να προκύψει και από την σχέση $\varepsilon = \dfrac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}$, όπου r_α, r_π οι ακτίνες του περίγειου και απόγειου αντίστοιχα. Είναι $r_\alpha = R + h$ και η ανισότητα $r_\pi < R$ ισοδυναμεί με $\varepsilon < \dfrac{h}{2R+h}$.

---

2. (α) $\dfrac{m_2 v_0^2}{r_0} = \dfrac{k}{r_0^2} \Leftrightarrow k = m_2 v_0^2 r_0$.

(β) Για το πρόβλημα των δύο σωμάτων ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2} \\ \vec{r} &= \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{R}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{aligned}\right.$$

$$(m_1+m_2)\,\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau} + \vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau}\,,$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} + \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau}\,, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

(β_1) Αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ευθύγραμμη και ομαλή. Αρχικά είναι $\vec{R}_1 = 0$, $\vec{R}_2 = r_0\hat{x}$, $\dot{\vec{R}}_1 = 0$, $\dot{\vec{R}}_2 = v_0\hat{y}$, οπότε $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}r_0\hat{x}$ και $\dot{\vec{R}} = \dfrac{m_1\dot{\vec{R}}_1 + m_2\dot{\vec{R}}_2}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_0\hat{y}$. Επομένως σε κάθε χρόνο $\vec{R} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(r_0\hat{x} + v_0 t\hat{y})$.

(β_2) Η κίνηση του m_2 ως προς το m_1 καθορίζεται από την εξίσωση $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau}$, όπου $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ η ανηγμένη μάζα και $\vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\dfrac{k}{r^2}\hat{r}$ η δύναμη από το m_1 στο m_2.

Η εξίσωση τροχιάς είναι $u'' + u = \dfrac{\mu k}{L^2} \Leftrightarrow u = \dfrac{\mu k}{L^2}(1 + C_1\cos\phi + C_2\sin\phi)$. Αρχικά $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = r_0\hat{x}$ και $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_2 - \dot{\vec{R}}_1 = v_0\hat{y}$, άρα $L = \mu r_0 v_0$ και οι αρχικές συνθήκες είναι $\phi = 0$, $u = \dfrac{1}{r_0}$ και $u' = 0$ (αφού $\dot{r} = 0$). Οι σταθερές προκύπτουν (χρησιμοποιώντας και την $k = m_2 v_0^2 r_0$) $C_1 = \dfrac{\mu}{m_2} - 1 = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$, $C_2 = 0$ και η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{m_1 r_0}{m_1 + m_2 - m_2\cos\phi}$.

Πρόκειται για ελλειπτική τροχιά το απόκεντρο της οποίας είναι η αρχική θέση $\phi = 0$ (διότι για $\phi = 0$ έχουμε το μέγιστο r). Το περίκεντρο είναι σε απόσταση $r_\pi = \dfrac{m_1 r_0}{m_1 + 2m_2}$ (αντιστοιχεί σε $\phi = \pi$).

---

3. Λόγω συμμετρίας τα κέντρα των τεσσάρων σωμάτων βρίσκονται πάντα σε κορυφές τετραγώνου πλευράς $\beta = r\sqrt{2}$, όπου r η απόσταση του κέντρου κάθε σώματος από το κέντρο μάζας O.
Κάθε ένα από τα σώματα δέχεται τρεις βαρυτικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα με φορά προς το καθένα και μέτρα $\dfrac{Gm^2}{(2r)^2}$ από το απέναντι και $\dfrac{Gm^2}{\beta^2}$ από τα διπλανά. Η συνισταμένη είναι κεντρική δύναμη με φορά προς το O και μέτρο $F = \dfrac{Gm^2}{(2r)^2} + 2\dfrac{Gm^2}{\beta^2}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{k}{r^2}$, με $k = Gm^2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
(α$_1$) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη και ο νόμος Νεύτωνα (για το κέντρο μάζας του εκάστοτε σώματος που βρίσκεται στο κέντρο του) δίνει $m\ddot{r} = -\dfrac{k}{r^2}$.
(α$_2$) Το ισοδύναμο ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{k}{r} = E$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $E = -\dfrac{k}{r_0}$ όπου $r_0^2 + r_0^2 = (4R)^2 \Leftrightarrow r_0 = \sqrt{8}R$, οπότε η ταχύτητα σε κάθε θέση έχει μέτρο $v = \sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}$.
Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση ενέργειας του συνολικού συστήματος. Αρχικά η κινητική ενέργεια είναι μηδενική και η δυναμική ενέργεια είναι $V_{12} + V_{13} + V_{14} + V_{23} + V_{24} + V_{34} = -\dfrac{Gm^2}{R}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{4k}{r_0}$. Σε μια τυχαία θέση η κινητική ενέργεια είναι $4\dfrac{mv^2}{2}$ και η δυναμική ενέργεια είναι $-\dfrac{4k}{r}$. Η ταχύτητα σε κάθε θέση προκύπτει από την διατήρηση ενέργειας $0 - \dfrac{4k}{r_0} = 4\dfrac{mv^2}{2} - 2\dfrac{4k}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}$.
Όταν τα σώματα έρθουν σε επαφή η πλευρά του τετραγώνου είναι $\beta = 2R$, οπότε όλες οι αποστάσεις υποδιπλασιάζονται. Άρα $r = \dfrac{r_0}{2}$ και η ταχύτητα έχει μέτρο $v = \sqrt{\dfrac{2k}{mr_0}}$ και φορά προς το O.
(α$_3$) $t = \displaystyle\int \frac{dr}{\dot{r}} = \int_{r_0}^{r_0/2} \frac{dr}{-\sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}}$. Θέτοντας $r = r_0 x$ προκύπτει $t = \sqrt{\dfrac{mr_0^3}{2k}}\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}}$ και χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα $t = \sqrt{\dfrac{mr_0^3}{2k}}\dfrac{2+\pi}{4}$.
(β$_1$) Πρέπει οι κινήσεις να είναι κυκλικές, οπότε $\dfrac{mv_0^2}{r_0} = F = \dfrac{k}{r_0^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{k}{mr_0}}$.
(β$_2$) Οριακά η κίνηση των σωμάτων είναι ελλειπτική με απόκεντρο την αρχική θέση όπου $r_\alpha = r_0$, $v_\alpha = v_0$ και περίκεντρο την θέση επαφής όπου $r_\pi = \sqrt{2}R = r_0/2$. Συνδυασμός των διατηρήσεων ενέργειας $\dfrac{mv_\alpha^2}{2} - \dfrac{k}{r_\alpha} = \dfrac{mv_\pi^2}{2} - \dfrac{k}{r_\pi}$ και στροφορμής $mv_\alpha r_\alpha = mv_\pi r_\pi$ δίνουν $v_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{3mr_0}}$.
Το ίδιο προκύπτει μέσω της μελέτης του ενεργού δυναμικού $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{k}{r}$, όπου $L = mv_0 r_0$. Τα όρια της ακτινικής κίνησης είναι r_0 και $r_\pi = r_0/2$, οπότε $V_{\text{eff}}(r_0) = V_{\text{eff}}(r_\pi) \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{3mr_0}}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση ενέργειας και στροφορμής του συνολικού συστήματος ως προς το κέντρο μάζας. Αρχικά η στροφορμή είναι $4mr_0v_0$, η κινητική ενέργεια $4\frac{mv_0^2}{2}$ και η δυναμική ενέργεια $V_{12}+V_{13}+V_{14}+V_{23}+V_{24}+V_{34}=-\frac{4k}{r_0}$. Τελικά, στην οριακή περίπτωση που μόλις ακουμπούν τα σώματα, όλες οι αποστάσεις υποδιπλασιάζονται και η ταχύτητα v_π είναι ξανά κάθετη στην ακτίνα από το κέντρο. Άρα η διατήρηση στροφορμής δίνει $v_\pi = 2v_0$ και η δυναμική ενέργεια είναι διπλάσια της αρχικής. Η διατήρηση ενέργειας δίνει $4\frac{mv_0^2}{2}-\frac{4k}{r_0}=4\frac{m(2v_0)^2}{2}-2\frac{4k}{r_0}\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\frac{2k}{3mr_0}}$.

Η περίοδος της κίνησης προκύπτει από τον 3ο νόμο Kepler να είναι $2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k/m}}$, όπου $a=\frac{r_\alpha+r_\pi}{2}=\frac{3}{4}r_0$ ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς.

Αλλιώς $T=2\int_{r_\pi}^{r_\alpha}\frac{dr}{\dot r}=2\int_{r_\pi}^{r_\alpha}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V_{\text{eff}}(r)\right]}}=\sqrt{\frac{3r_0}{k/m}}\int_{r_0/2}^{r_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{-\frac{r_0^2}{2}+\frac{3r_0}{2}r-r^2}}$. Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα με $b=3r_0/4$ και $c=-r_0^2/2$ προκύπτει $T=2\pi\sqrt{\frac{(3r_0/4)^3}{k/m}}$.

(β_3) Οριακά πρέπει η ενέργεια να είναι μηδενική, δηλ. $\frac{mv_0^2}{2}-\frac{k}{r_0}=0\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση ενέργειας του συνολικού συστήματος. Αρχικά η κινητική ενέργεια είναι $4\frac{mv_0^2}{2}$ και η δυναμική $V_{12}+V_{13}+V_{14}+V_{23}+V_{24}+V_{34}=-\frac{4k}{r_0}$. Η διατήρηση ενέργειας στην οριακή περίπτωση δίνει $4\frac{mv_0^2}{2}-\frac{4k}{r_0}=0\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$.

Για την ελάχιστη αυτή v_0 κάθε μάζα ακολουθεί παραβολική τροχιά και σε κάθε θέση ισχύει $\frac{m\dot r^2}{2}+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{k}{r}=0$ με $L=mr_0v_0=\sqrt{2mkr_0}$. Η απόσταση αυξάνει μονότονα (αρχικά η μάζα βρίσκεται στο περίκεντρο αφού $\vec v\perp\vec r$) και άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\dot r=\sqrt{\frac{2k(r-r_0)}{mr^2}}$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει $t=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\dot r}=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{r-r_0}}$. Θέτοντας $r=r_0+x$ είναι $t=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^{r-r_0}\left(r_0x^{-1/2}+x^{1/2}\right)dx=\sqrt{\frac{2m}{9k}}(r+2r_0)(r-r_0)^{1/2}$.

Η σχέση γωνίας με την απόσταση από το O για παραβολική τροχιά (δηλ. για μοναδιαία εκκεντρότητα) είναι $r=\frac{p}{1+\cos\phi}$. Στο περίκεντρο ($\phi=0$) που βρίσκεται αρχικά η μάζα είναι $r=r_0$, άρα $p=2r_0$ και η σχέση γωνίας–απόστασης είναι $r=\frac{2r_0}{1+\cos\phi}$.
