Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 Ν. Βλαχάκης

---

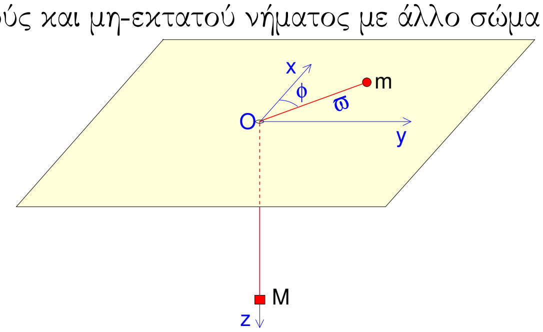
1. Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης $V(r) = -\dfrac{200R^2}{(r^2+R^2-1)^2}$ (σε κατάλληλες μονάδες). Το σώμα έχει στροφορμή $L = 10$ και ενέργεια $E = 0$. Η σταθερά R είναι τέτοια ώστε το σώμα να έχει μέγιστη ακτινική κινητική ενέργεια στην ακτίνα $r = 1$.
(α) Βρείτε και σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό σε ίδιο διάγραμμα με το $V(r)$.
(β) Βρείτε τα όρια της ακτινικής κίνησης.
(γ) Ποια η περίοδος της ακτινικής κίνησης; Πόση αζιμουθιακή γωνία ϕ διαγράφεται σε αυτό τον χρόνο;
(δ) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας σε κάθε θέση.
(ε) Όταν το σώμα περνά από το σημείο $r = 8^{1/4}+1$ του ασκείται στιγμιαία ώση που του προσδίδει ακτινική ταχύτητα v_0. Για ποιες τιμές της v_0 το σώμα θα διαφύγει στο άπειρο;
Δίνονται τα αόριστα ολοκληρώματα $\displaystyle\int \frac{(w+a)\,dw}{w\sqrt{-w^2+2bw-a^2}} = 2\arctan\frac{w-a}{\sqrt{-w^2+2bw-a^2}} +$ σταθερά και $\displaystyle\int \frac{(w+a)\,dw}{\sqrt{-w^2+2bw-c}} = -\sqrt{-w^2+2bw-c} + (a+b)\arctan\frac{w-b}{\sqrt{-w^2+2bw-c}} +$ σταθερά.
(Αν δυσκολευτείτε με την μελέτη της συνάρτησης ή τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων μπορείτε να χρησιμοποιήσετε π.χ. την ιστοσελίδα https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/ και να θεωρήσετε $R^2 = \sqrt{8}$.)

---

2. Έστω κυκλική κίνηση ακτίνας $r = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες), σώματος $m = 1$ και στροφορμής $L = 1$, μέσα σε πεδίο κεντρικής δύναμης $F = -kr^n$.
(α) Ποια η τιμή της σταθεράς k;
(β) Έστω η κυκλική συχνότητα μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά (με την στροφορμή να παραμένει $L = 1$) είναι $\omega = 1$.
(β_1) Βρείτε την σταθερά n.
(β_2) Τι είδους καμπύλη είναι η διαταραγμένη τροχιά;
(β_3) Αν για $t = 0$ είναι $r = 1.01$, $\phi = 0$ και $\dot r = 0$ βρείτε τις $r(t)$ και $\phi(t)$.

---

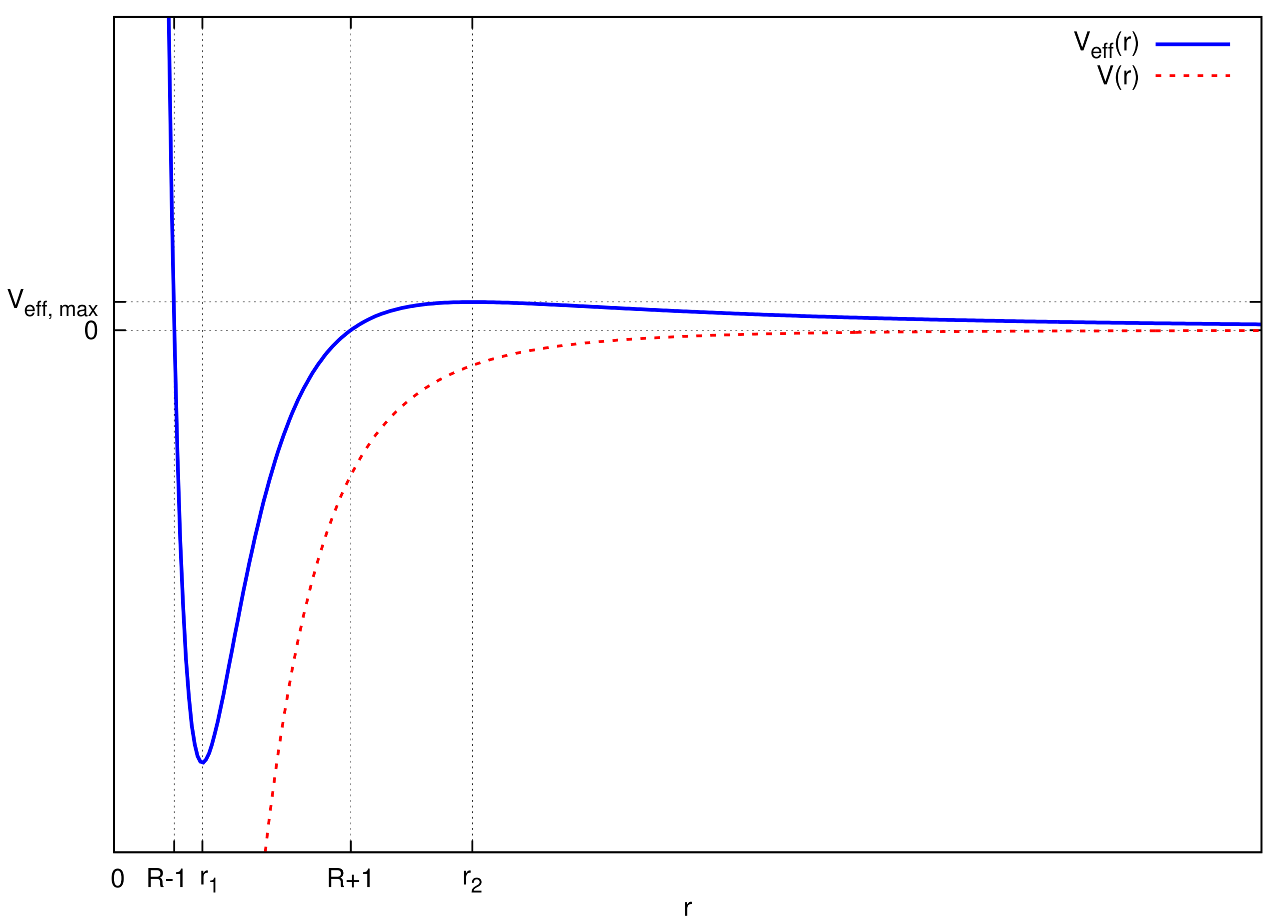
3. Σώμα m κινείται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι, δεμένο μέσω αβαρούς και μη-εκτατού νήματος με άλλο σώμα M. Το νήμα περνά από οπή του τραπεζιού και είναι τεντωμένο.



(α) Έστω δεν υπάρχουν τριβές.
(α_1) Ποιες εξισώσεις δίνουν τα $\varpi(t)$, $\phi(t)$ και την τάση νήματος; Δείξτε ότι υπάρχουν ολοκληρώματα στροφορμής $m\varpi^2\dot\phi = L$ και ενέργειας $\frac{1}{2}(M+m)\dot\varpi^2 + V_{\rm eff}(\varpi) = E$, βρείτε την συνάρτηση $V_{\rm eff}(\varpi)$ και σχεδιάστε το γράφημά της.
(α_2) Περιγράψτε την κίνηση για τυχαίες τιμές των L, E.
(α_3) Τι γωνιακή ταχύτητα ω πρέπει να δώσουμε στο σώμα m ώστε να εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R;
(α_4) Αν το σώμα m κινείται σε κύκλο ακτίνας R και ξαφνικά δώσουμε (ακαριαία) μια μικρή ταχύτητα προς τα κάτω στο σώμα M, πόσες ταλαντώσεις θα εκτελεί στον χρόνο που το m διαγράφει ένα κύκλο;
(β) Έστω υπάρχει τριβή ολίσθησης με συντελεστή μ και η επιτάχυνση βαρύτητας είναι g.
(β_1) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που δίνουν τις $\phi(t)$ και $\varpi(t)$.
(β_2) Αν η τριβή είναι πολύ μικρή και οι αρχικές συνθήκες είναι ίδιες με αυτές του ερωτήματος (α_3), δηλ. $\varpi = R$, $\phi = 0$, $\dot\varpi = 0$, $\dot\phi = \omega$, η ακτινική ταχύτητα του σώματος είναι συνεχώς πολύ μικρότερη της περιστροφικής. Βρείτε προσεγγιστικά τη θέση του σώματος σε κάθε χρόνο και την τροχιά που ακολουθεί.

Λύσεις – Εργασία #5

1. (α) $V_{\rm eff}(r)=\dfrac{L^2}{2mr^2}+V(r)=\dfrac{50}{r^2}-\dfrac{200R^2}{(r^2+R^2-1)^2}$, $V'_{\rm eff}(r)=-\dfrac{100}{r^3}+\dfrac{800R^2r}{(r^2+R^2-1)^3}$.
Αφού το σώμα έχει μέγιστη ακτινική κινητική ενέργεια στην ακτίνα $r=1$, πρέπει σε αυτό το σημείο η $V_{\rm eff}$ να είναι ελάχιστη (διότι $\dfrac{\dot r^2}{2}+V_{\rm eff}(r)=E$), δηλ. $V'_{\rm eff}(1)=0\Leftrightarrow R^2=\sqrt{8}$.
$V'_{\rm eff}(r)>0\Leftrightarrow(r^2+\sqrt8-1)^3<8\sqrt8r^4\Leftrightarrow r^2+\sqrt8-1<\sqrt8r^{4/3}\Leftrightarrow r^2-1-\sqrt8(r^{4/3}-1)<0$. Το αριστερό μέλος παραγοντοποιείται αφού μηδενίζεται στο $r=1$. Πράγματι, θέτοντας $r^{2/3}=\xi$ γράφεται $\xi^3-1-\sqrt8(\xi^2-1)=(\xi-1)(\xi^2+\xi+1)-\sqrt8(\xi-1)(\xi+1)=(\xi-1)[\xi^2-(\sqrt8-1)\xi+1-\sqrt8]$ και βρίσκοντας τις ρίζες του τελευταίου τριωνύμου γράφεται $(\xi-1)(\xi-\xi_+)(\xi-\xi_-)$ όπου $\xi_+=\dfrac{\sqrt8-1+\sqrt{5+2\sqrt8}}{2}\approx2.55$ και $\xi_-=\dfrac{\sqrt8-1-\sqrt{5+2\sqrt8}}{2}\approx-0.72$. Άρα η $V'_{\rm eff}(r)$ είναι θετική ανάμεσα στις ρίζες $r_1=1$, $r_2=\xi_+^{3/2}$ και αρνητική αλλού. Τα ακρότατα είναι ελάχιστο στο $r_1=1$, ίσο με $V_{\rm eff}(1)=50-25\sqrt8\approx-20.71$ και τοπικό μέγιστο στο $r_2=\xi_+^{3/2}\approx4.06$ ίσο με $V_{\rm eff}(\xi_+^{3/2})=\dfrac{50}{\xi_+^3}-\dfrac{200\sqrt8}{(\xi_+^3+\sqrt8-1)^2}\approx1.35$.
Η $V(r)$ έχει $V'(r)=\dfrac{800R^2r}{(r^2+R^2-1)^3}$, είναι αύξουσα με $V(0)=-\dfrac{200R^2}{(R^2-1)^2}\approx-169.21$ και $\lim\limits_{r\to\infty}V(r)=0$.



(β) $V_{\rm eff}=E=0\Leftrightarrow\dfrac{50}{r^2}=\dfrac{200R^2}{(r^2+R^2-1)^2}\Leftrightarrow(r^2+R^2-1)^2=4R^2r^2\Leftrightarrow r^2+R^2-1=2Rr$ (κρατήσαμε μόνο το θετικό πρόσημο αφού και τα δύο μέλη είναι θετικά). Άρα $(r-R)^2=1\Leftrightarrow r=R\pm1$, δηλ.

$r_{\min} = 8^{1/4} - 1 \approx 0.68$ και $r_{\max} = 8^{1/4} + 1 \approx 2.68$.

(γ) Η ακτινική κίνηση γίνεται με ταχύτητα $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{eff}}(r)]}$ με $E = 0$ άρα $T_r = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\dot{r}} = \int_{R-1}^{R+1} \frac{2\,dr}{\sqrt{-\frac{100}{r^2} + \frac{400R^2}{(r^2+R^2-1)^2}}} = \int_{R-1}^{R+1} \frac{2r(r^2+R^2-1)\,dr}{10\sqrt{-r^4+2(R^2+1)r^2-(R^2-1)^2}}$. Με αλλαγή μεταβλητής $w = r^2$ προκύπτει $T_r = \frac{1}{10}\int \frac{(w+R^2-1)\,dw}{\sqrt{-w^2+2(R^2+1)w-(R^2-1)^2}}$, Από τα δοσμένα ολοκληρώματα με $a = R^2-1$, $b = R^2+1$, $c = (R^2-1)^2$ είναι $T_r = \frac{1}{10}\left[-\sqrt{-w^2+2bw-c} + (a+b)\arctan\frac{w-b}{\sqrt{-w^2+2bw-c}}\right]_{(R-1)^2}^{(R+1)^2} = \frac{\pi R^2}{5}$ (διότι στα όρια η ρίζα μηδενίζεται και $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$).

Είναι $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{10}{r^2}$, άρα $\frac{d\phi}{dr} = \frac{10}{r^2\dot{r}}$ με $\dot{r} = \pm\sqrt{-\frac{100}{r^2} + \frac{400R^2}{(r^2+R^2-1)^2}}$. Η γωνία που διαγράφεται όσο το σώμα κινείται από το $r_{\min}$ στο $r_{\max}$ είναι $\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{10\,dr}{r^2|\dot{r}|}$. Κατά την επιστροφή διαγράφεται ίση γωνία $\int_{r_{\max}}^{r_{\min}} \frac{10\,dr}{r^2(-|\dot{r}|)}$. Άρα η συνολική γωνία είναι $\Delta\phi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{10\,dr}{r^2|\dot{r}|} = 2\int_{R-1}^{R+1} \frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{4R^2}{(r^2+R^2-1)^2}}} = \int_{R-1}^{R+1} \frac{(r^2+R^2-1)\,dr^2}{r^2\sqrt{-r^4+2(R^2+1)r^2-(R^2-1)^2}}$. Από τα δοσμένα ολοκληρώματα με $a = R^2-1$, $b = R^2+1$ είναι

$$\Delta\phi = 2\left[\arctan\frac{r^2-R^2+1}{\sqrt{-r^4+2(R^2+1)r^2-(R^2-1)^2}}\right]_{R-1}^{R+1} = 2\pi.$$

Το σώμα εκτελεί ακριβώς μια περιστροφή, άρα η ολική κίνηση είναι περιοδική με περίοδο T_r.

(δ) Χρησιμοποιώντας την σχέση $\mathcal{R} = \frac{v^3}{|\vec{a}\times\vec{v}|}$ με $v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)]}$, $m\vec{a} = -V'(r)\hat{r}$ και $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + \frac{L}{mr}\hat{\phi}$, οπότε $|\vec{a}\times\vec{v}| = \frac{|LV'|}{m^2 r}$, προκύπτει $\mathcal{R} = \frac{(-2V)^{3/2}r}{10|V'|} = R$, δηλ η τροχιά είναι κυκλική!

Η ολοκλήρωση της $\frac{d\phi}{dr} = \frac{10}{r^2\dot{r}} = \pm\frac{10}{r^2\sqrt{-\frac{100}{r^2} + \frac{400R^2}{(r^2+R^2-1)^2}}}$ δίνει $\pm\phi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{4R^2}{(r^2+R^2-1)^2}}} = \int \frac{(r^2+R^2-1)\,dr^2}{2r^2\sqrt{-r^4+2(R^2+1)r^2-(R^2-1)^2}}$. Από τα δοσμένα ολοκληρώματα με $a = R^2-1$, $b = R^2+1$ είναι $\pm\phi +$ σταθερά $= \arctan\frac{r^2-R^2+1}{\sqrt{-r^4+2(R^2+1)r^2-(R^2-1)^2}} \Leftrightarrow \tan^2(\phi + \text{σταθερά}) = \frac{(r^2-R^2+1)^2}{-r^4+2(R^2+1)r^2-(R^2-1)^2} \Leftrightarrow \sin(\phi + C) = \frac{r^2-R^2+1}{2r} \Leftrightarrow r^2 - 2r\sin(\phi+C) + 1 = R^2$. Αυτή είναι εξίσωση κύκλου σε πολικές, με ακτίνα R και μοναδιαία απόσταση του κέντρου από την αρχή των αξόνων (ισοδυναμεί με $r^2 - 2r\cos\phi\sin C - 2r\sin\phi\cos C + 1 = R^2 \Leftrightarrow r^2 - 2x\sin C - 2y\cos C + 1 = R^2 \Leftrightarrow (x-\sin C)^2 + (y-\cos C)^2 = R^2$).

(ε) Την στιγμή που ασκείται η ώση το σώμα βρίσκεται στην ακτίνα $r_0 = 8^{1/4}+1$ η οποία είναι το $r_{\max}$ της προηγούμενης τροχιάς. Άρα δεν έχει ακτινική ταχύτητα πριν την άσκηση της ώσης και αμέσως μετά έχει $\dot{r} = v_0$. Αφού του προσδίδουμε μόνο v_r η στροφορμή δεν αλλάζει, άρα και η συνάρτηση $V_{\text{eff}}(r)$ δεν αλλάζει. Η ακτίνα r_0 είναι μικρότερη σχετικά με τον λόφο του ενεργού δυναμικού, επομένως για να τον περάσει και να διαφύγει στο άπειρο πρέπει $E > V_{\rm eff,max} \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} + V_{\rm eff}(r_0) > V_{\rm eff}(r_2) \Leftrightarrow |v_0| > \sqrt{2V_{\rm eff}(r_2)} \approx 1.64$ (δεν έχει σημασία η φορά της ακτινικής ταχύτητας που προσδίδει η ώση στο σώμα).

---

2. (α) Η ταχύτητα είναι $v = \dfrac{L}{mr} = 1$ και η κεντρομόλος δύναμη $-\dfrac{mv^2}{r}\hat{r} = -\hat{r}$. Για $r = 1$ πρέπει να ισχύει $\vec{F} = -\dfrac{mv^2}{r}\hat{r} \Leftrightarrow k = 1$.

Το ίδιο απαιτώντας το $V_{\rm eff} = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ να έχει ακρότατο στο $r = 1$, δηλ. $V'_{\rm eff}(1) = 0$. Είναι $V'_{\rm eff}(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} + V'(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} - F(r)$, οπότε πρέπει να ισχύει $F(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3}$ για $r = 1$.

(β_1) Η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{r} - \dfrac{L^2}{mr^3} = F$ (προκύπτει είτε από την ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα με $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$, $\dot{\phi} = L/mr$ και $m = 1$, είτε από $m\ddot{r} = -V'_{\rm eff}(r)$ με $V_{\rm eff} = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ και $V'(r) = -F$), δηλ. $\ddot{r} = \dfrac{L^2}{r^3} - r^n$.
Για τις μικρές ταλαντώσεις με στροφορμή $L = 1$ γύρω από την ακτίνα $r = 1$ θέτοντας $r = 1 + q$ προκύπτει με ανάπτυγμα Taylor $\ddot{q} = (1+q)^{-3} - (1+q)^n \approx 1 - 3q - (1 + nq) \Leftrightarrow \ddot{q} + (3+n)q = 0$, δηλ. εξίσωση ταλαντωτή με $\omega^2 = 3 + n$.
Το ίδιο από $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\rm eff}(r) = E$ και ανάπτυγμα Taylor του ενεργού δυναμικού γύρω από το σημείο ελαχίστου $r = 1$, δηλ. για $r = 1 + q$, οπότε $V_{\rm eff}(1+q) \approx V_{\rm eff}(1) + \dfrac{1}{2}V''_{\rm eff}(1)q^2$. Είναι $V'_{\rm eff}(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} + V'(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} - F(r)$ και $V''_{\rm eff}(r) = \dfrac{3L^2}{mr^4} - F'(r)$ οπότε η εξίσωση κίνησης είναι $\dfrac{\dot{q}^2}{2} + \dfrac{1}{2}(3+n)q^2 =$ σταθερά, δηλ. εξίσωση ταλαντωτή με $\omega^2 = 3 + n$.
Για να είναι $\omega = 1$ πρέπει $3 + n = 1 \Leftarrow n = -2$.
(β_2) Είναι $F = -1/r^2$, δηλ. πρόκειται για ελκτικό πεδίο με δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης. Σε τέτοια πεδία οι τροχιές είναι κωνικές τομές, επομένως η διαταραχή της κυκλικής τροχιάς είναι ελλειπτική τροχιά (με μικρή εκκεντρότητα).
(β_3) Η γενική λύση είναι $q = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ και αφού για $t = 0$ είναι $q = 0.01$ και $\dot{q} = 0$ προκύπτει $q = 0.01\cos t$, δηλ. $r = 1 + 0.01\cos t$.
Η γωνία βρίσκεται από $\dot{\phi} = \dfrac{L}{mr^2} = (1 + 0.01\cos t)^{-2} \approx 1 - 0.02\cos t$, άρα $\phi = t - 0.02\sin t$ (η σταθερά μηδενίζεται ώστε για $t = 0$ να είναι $\phi = 0$).
Η εξίσωση τροχιάς βρίσκεται θέτοντας $t \approx \phi$ στην $r = 1 + 0.01\cos t$ και είναι $r = 1 + 0.01\cos\phi \approx \dfrac{1}{1 - 0.01\cos\phi}$, δηλ. έλλειψη εκκεντρότητας 0.01 (το αρχικό σημείο είναι το απόκεντρο).
Αυτό βρίσκεται και λύνοντας την $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2} = 1$. Η γενική λύση είναι $u = \dfrac{1}{r} = 1 + C_1\sin\phi + C_2\cos\phi$ και οι αρχικές συνθήκες $r = 1.01$, $\phi = 0$, $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow u' = 0$ δίνουν $u = 1 - \dfrac{0.01}{1.01}\cos\phi \approx 1 - 0.01\cos\phi$ οπότε $r = \dfrac{1}{1 - 0.01\cos\phi}$.

---

3. (α_1) Για το m ο νόμος Νεύτωνα είναι $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \dfrac{m}{\varpi}\dfrac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -T\hat{\varpi}$, οπότε η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει ολοκλήρωμα στροφορμής $m\varpi^2\dot{\phi} = L$ και η $\hat{\varpi}$ συνιστώσα γράφεται $m\ddot{\varpi} - \dfrac{L^2}{m\varpi^3} = -T$. Για το M ο νόμος Νεύτωνα είναι $M\ddot{z} = Mg - T$. Λόγω της $z + \varpi = \ell$ (το σταθερό μήκος του νήματος) οι ταχύτητα και επιτάχυνση του M είναι αντίθετες από την ακτινική ταχύτητα και επιτάχυνση του m, αντίστοιχα, δηλ.

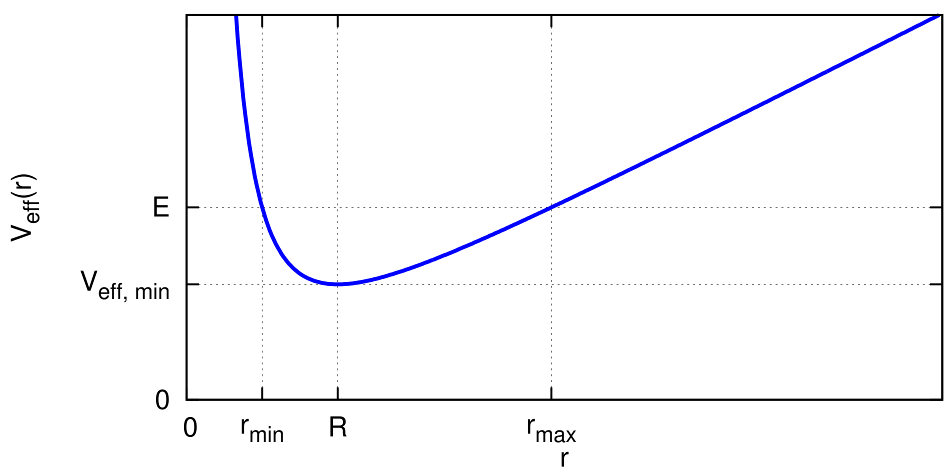
$\ddot{z} = -\ddot{\varpi}$. Έτσι ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $M\ddot{\varpi} = -Mg + T \Leftrightarrow T = M(\ddot{\varpi} + g)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για το m βρίσκουμε $(M+m)\ddot{\varpi} = \dfrac{L^2}{m\varpi^3} - Mg$.

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις που δίνουν τα ϖ, ϕ και T είναι $(M+m)\ddot{\varpi} = \dfrac{L^2}{m\varpi^3} - Mg$, $\dot{\phi} = \dfrac{L}{m\varpi^2}$ και $T = \dfrac{M}{M+m}\left(\dfrac{L^2}{m\varpi^3} + mg\right)$.

Η πρώτη είναι $(M+m)\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ με $f = \dfrac{L^2}{m\varpi^3} - Mg$ και άρα ισοδυναμεί με ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{1}{2}(M+m)\dot{\varpi}^2 + V_{\text{eff}}(\varpi) = E$, όπου $V_{\text{eff}} = -\displaystyle\int f\, d\varpi = \dfrac{L^2}{2m\varpi^2} + Mg\varpi$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).

Το ολοκλήρωμα $\dfrac{1}{2}(M+m)\dot{\varpi}^2 + \dfrac{L^2}{2m\varpi^2} + Mg\varpi = E$ εκφράζει την πραγματική ενέργεια των δύο μαζών. Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια του M μαζί με την ακτινική κινητική ενέργεια του m, ο δεύτερος όρος είναι η περιστροφική κινητική ενέργεια του m και ο τελευταίος η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους του M (ανάλογα με το επίπεδο αναφοράς οι δυναμικές ενέργειες των μαζών έχουν επιπλέον μία σταθερά, η οποία όμως απορροφάται μέσα στο E).

$V'_{\text{eff}} = -\dfrac{L^2}{m\varpi^3} + Mg$, αρνητική για $\varpi < R$, θετική για $\varpi > R$, όπου $R = \left(\dfrac{L^2}{mMg}\right)^{1/3}$ σημείο ελαχίστου.



(α_2) Η επιτρεπτή περιοχή της κίνησης για κάθε ενέργεια είναι $V_{\text{eff}} \le E$, δηλ. ο δακτύλιος $r_{\min} \le r \le r_{\max}$ όπου $r_{\min}$ και $r_{\max}$ οι λύσεις της $V_{\text{eff}} = E$ που αποτελούν αψίδες της τροχιάς (εκεί η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική). Δηλ. στην ακτινική κατεύθυνση η κίνηση είναι ταλάντωση μεταξύ των $r_{\min}$ και $r_{\max}$, ενώ για την αζιμουθιακή κίνηση ισχύει σε κάθε θέση $v_\phi = L/mr \Leftrightarrow \dot{\phi} = L/mr^2$.

Για ενέργεια ίση με το ελάχιστο της V_{eff}, δηλ. $E = V_{\text{eff}}(R) = \dfrac{3Mg}{2}\left(\dfrac{L^2}{mMg}\right)^{1/3}$ ο δακτύλιος εκφυλίζεται σε κύκλο ακτίνας $R = \left(\dfrac{L^2}{mMg}\right)^{1/3}$, δηλ. η κίνηση είναι κυκλική.

(α_3) Όπως βρήκαμε, πρέπει να ισχύει $R = \left(\dfrac{L^2}{mMg}\right)^{1/3}$. Θέτοντας $L = m\omega R^2$ βρίσκουμε $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{Mg}{mR}}$.
Αλλιώς: Για κυκλική κίνηση το σώμα M είναι ακίνητο άρα η τάση του νήματος ισούται με το βάρος Mg. Για το m η τάση ισούται με την κεντρομόλο, οπότε $Mg = m\omega^2 R \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{\dfrac{Mg}{mR}}$.

(α_4) Θα είναι $\varpi = R + q$ με $|q| \ll R$, οπότε με ανάπτυγμα Taylor είναι $V_{\text{eff}}(\varpi) \approx V_{\text{eff}}(R) + V'_{\text{eff}}(R)q +$

$\frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(R)q^2 = V_{\text{eff}}(R) + \frac{3L^2}{2mR^4}q^2 = V_{\text{eff}}(R) + \frac{3m\omega^2}{2}q^2$ (διότι $L = m\omega R^2$) και το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\frac{(M+m)\dot{q}^2}{2} + \frac{3m\omega^2}{2}q^2 =$ σταθερά. Παραγωγίζοντας έχουμε εξίσωση ταλάντωσης $\ddot{q} + \omega_M^2 q = 0$ με $\omega_M = |\omega|\sqrt{\frac{3m}{M+m}}$ και συχνότητα $\nu_M = \frac{|\omega|}{2\pi}\sqrt{\frac{3m}{M+m}}$. Στον χρόνο περιστροφής του m, δηλ. σε $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ το M εκτελεί $\nu_M T = \sqrt{\frac{3m}{M+m}}$ ταλαντώσεις.

Τα ίδια προκύπτουν αν μελετήσουμε άμεσα την κίνηση του M, δηλ. διαταράξουμε την εξίσωση κίνησής του $M\ddot{z} = Mg - T = Mg - \frac{M}{M+m}\left[\frac{L^2}{m(\ell-z)^3} + mg\right]$ θέτοντας $z = \ell - R - q$.

Η λύση της εξίσωσης ταλαντωτή που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $q = 0$ και $\dot{q} = -v_0$ (αν $\dot{z} = v_0$ είναι η ταχύτητα που δίνουμε στο M προς τα κάτω, με $v_0 > 0$, το σώμα m αποκτά ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi} = -v_0$) είναι $q = -\frac{v_0}{\omega_M}\sin(\omega_M t)$. Η κίνηση του m θα είναι διαταραγμένη κυκλική με $\varpi = R + q \approx R - \frac{v_0}{\omega_M}\sin(\omega_M t)$ και $\dot{\phi} = \frac{L}{m\varpi^2} = \frac{L}{mR^2(1+q/R)^2} \approx \omega(1 - 2q/R) = \omega\left[1 + 2\frac{v_0}{\omega_M R}\sin(\omega_M t)\right]$, δηλ. $\phi \approx \omega t - \frac{2\omega v_0}{\omega_M^2 R}\cos(\omega_M t) +$ σταθερά. Η περίοδος περιστροφής του m παραμένει περίπου $2\pi/|\omega|$.

(β$_1$) Ο νόμος Νεύτωνα για το M παραμένει $M\ddot{\varpi} = T - Mg$, οπότε $T = M(\ddot{\varpi} + g)$, ενώ για το m γίνεται $m\vec{a} = -T\hat{\varpi} - \mu m g\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ με $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$ και $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi}$.

Απαλείφοντας την T βρίσκουμε $\frac{M+m}{m}\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2 = -\frac{Mg}{m} - \frac{\mu g\dot{\varpi}}{\sqrt{\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2}}$ και $\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi}) = -\frac{\mu g\varpi\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2}}$.

(β$_2$) Αφού η ακτινική κίνηση είναι ασήμαντη σε σχέση με την περιστροφική η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $-\varpi\dot{\phi}^2 = -\frac{Mg}{m} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \omega\sqrt{\frac{R}{\varpi}}$ με $\omega = \pm\sqrt{\frac{Mg}{mR}}$, ενώ η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει $\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi}) = \mp\mu g$ ($\pm$ είναι το πρόσημο της $\dot{\phi}$, δηλ. του ω).

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει $\frac{1}{\varpi}\frac{d\varpi^{3/2}}{dt} = -\frac{\mu g}{|\omega|\sqrt{R}} \Leftrightarrow d\varpi^{1/2} = -\frac{\mu g}{3|\omega|\sqrt{R}}dt \Leftrightarrow \varpi^{1/2} = R^{1/2} - \frac{\mu g t}{3|\omega|\sqrt{R}}$, δηλ. $\varpi = R\left(1 - \frac{\mu g t}{3|\omega|R}\right)^2$.

Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει $\dot{\phi} = \omega\sqrt{\frac{R}{\varpi}} = \frac{\pm|\omega|}{1 - \frac{\mu g t}{3|\omega|R}} \Leftrightarrow \phi = \mp\frac{3\omega^2 R}{\mu g}\ln\left(1 - \frac{\mu g t}{3|\omega|R}\right) = \mp\frac{3M}{\mu m}\ln\left(1 - \frac{\mu g t}{3|\omega|R}\right)$.

Απαλείφοντας τον χρόνο μεταξύ των $\phi(t)$ και $\varpi(t)$ βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς $\varpi = Re^{\mp(2\mu m/3M)\phi}$.

Ο λόγος $\frac{\dot{\varpi}}{\varpi\dot{\phi}} = \mp\frac{2\mu m}{3M}$ παραμένει σταθερός, άρα συνεχώς η ακτινική ταχύτητα είναι αμελητέα σε σχέση με την περιστροφική. Επίσης ο όρος $\frac{M+m}{m}\ddot{\varpi}$ στην ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι ίσος με $2\mu^2(M+m)g/9M$και άρα αμελητέος σε σχέση με τον Mg/m αν $\left(\frac{2\mu m}{3M}\right)^2 \ll \frac{2m}{M+m} < 2$. Επομένως όλες οι υποθέσεις ισχύουν και η λύση είναι αυτοσυνεπής σε κάθε χρόνο αν ισχύει $\mu m/M \ll 1$.