Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 Ν. Βλαχάκης

---

1. Δύο σώματα Α και Β κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, δεμένα μεταξύ τους με αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους L. Το Α κινείται με γνωστό τρόπο, δηλ. η θέση του $\vec{r}_A(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου και το νήμα είναι τεντωμένο. Θέλουμε να βρούμε την θέση $\vec{r}$ του Β σε κάθε χρόνο.
(α) Δείξτε ότι σε πολικές συντεταγμένες στο σύστημα του Α η τροχιά του Β ικανοποιεί την $L\ddot{\phi} = -\vec{a}_A \cdot \hat{\phi}$. (Το σύστημα αυτό έχει σταθερά μοναδιαία, αλλά η αρχή του βρίσκεται πάντα στο Α.)
(β) Εφαρμόστε αν $\vec{r}_A = -\dfrac{L\omega^2 t^2}{2}\hat{x}$, $\vec{r}|_{t=0} = L\cos\epsilon\hat{x} + L\sin\epsilon\hat{y}$ με $0 < \epsilon \ll 1$ και $\dot{\vec{r}}|_{t=0} = 0$.
(γ) Αν το Α εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το σταθερό κέντρο Κ, δηλ. $KA = R\cos(\omega t)\hat{x} + R\sin(\omega t)\hat{y}$, δείξτε ότι η γωνία $\theta = \phi - \omega t$ ικανοποιεί την εξίσωση εκκρεμούς $\ddot{\theta} + \dfrac{\omega^2 R}{L}\sin\theta = 0$.
Αυτό σημαίνει ότι στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με κέντρο το Α και άξονα x την προέκταση της ΚΑ προς το Α, η κίνηση είναι κίνηση εκκρεμούς. Επαληθεύεται αυτό αν κάνετε την μελέτη στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή το Α;

---

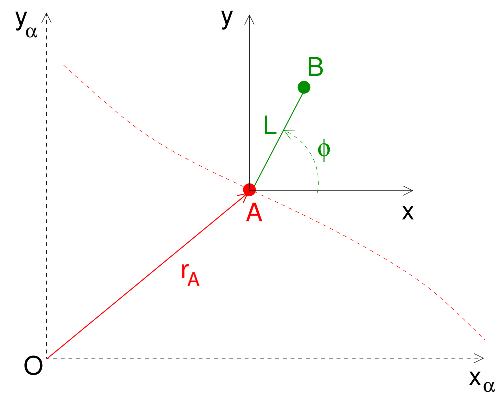
2. Από τόπο με γεωγραφικό πλάτος λ πάνω στην επιφάνεια της Γης πετάμε σώμα προς βορρά, υπό γωνία $45°$ ως προς τον ορίζοντα. Σκοπός μας είναι το σώμα να πέσει σε απόσταση s βόρεια του σημείου αφετηρίας, όπου s πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης.
(α) Δείξτε ότι λόγω της περιστροφής της Γης το σημείο πτώσης του σώματος θα αποκλίνει κατά $x = \omega\sqrt{\dfrac{2s^3}{g}}\left(\sin\lambda - \dfrac{1}{3}\cos\lambda\right)$ προς την ανατολή (προς την δύση αν $x < 0$).
(β) Εξηγήστε ποιοτικά γιατί η απόκλιση είναι προς την ανατολή για σημεία βολής κοντά στον βόρειο πόλο και προς την δύση για σημεία κοντά στον ισημερινό και σε όλο το νότιο ημισφαίριο.

---

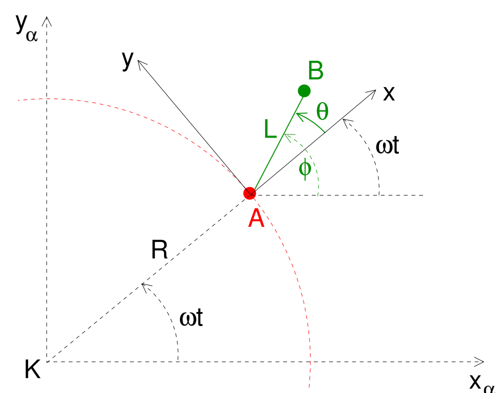
3. Σώμα μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση δύναμης επαναφοράς $-m(\omega^2 + \gamma^2)x$ και δύναμης αντίστασης $-2m\gamma\dot{x}$, όπου ω και γ θετικές σταθερές. Αρχικά αφήνεται (ταχύτητα $\dot{x} = 0$) από το σημείο $x = A$.
(α) Βρείτε την θέση του σε κάθε χρόνο.
(β) Τι απόσταση διανύει το σώμα μέχρι να ξανασταματήσει;
(γ) Αν στο σώμα ασκείται και δύναμη διεγέρτη $f_0\cos(\omega t)$ ποια είναι η θέση του σώματος σε «μεγάλους» χρόνους;
(δ) Ποια η μέση ισχύς που προσφέρει ο διεγέρτης σε «μεγάλους» χρόνους; Που καταλήγει αυτή η ισχύς;

Λύσεις – Εργασία #4

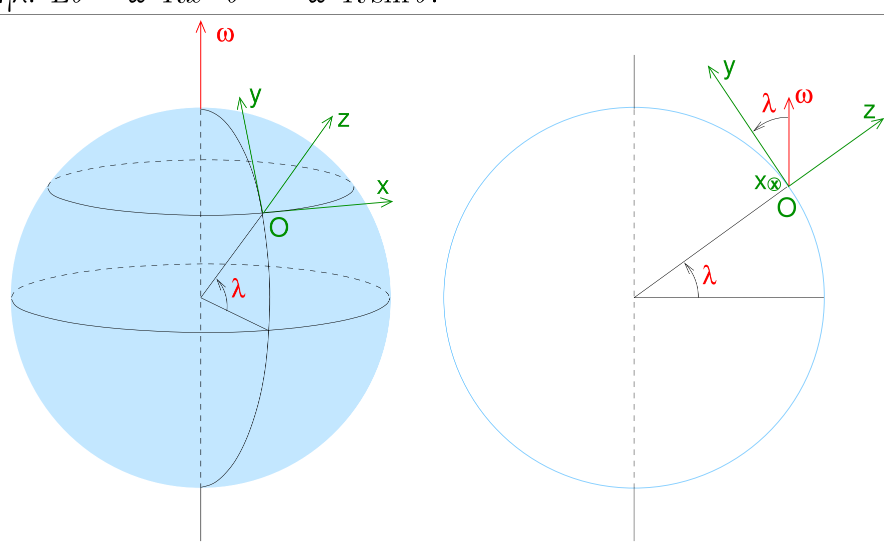
1. Σε πολικές συντεταγμένες στο μη αδρανειακό σύστημα που κινείται με το Α (χωρίς να περιστρέφεται) είναι $\vec{r}_\sigma = L\hat{r}$, $\vec{v}_\sigma = L\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a}_\sigma = -L\dot{\phi}^2\hat{r} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$. Ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\vec{a}_\sigma = \vec{F} - m\vec{a}_A$, όπου $\vec{F} = -F\hat{r}$ η τάση του νήματος και $-m\vec{a}_A$ η υποθετική δύναμη που πρέπει να προσθέσουμε αφού το σύστημα επιταχύνεται με $\vec{a}_A$. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του δίνει $L\ddot{\phi} = -\vec{a}_A \cdot \hat{\phi}$. Αν αντικαταστήσουμε $\vec{a}_A = \ddot{x}_A\hat{x} + \ddot{y}_A\hat{y}$ και $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ γράφεται σαν $L\ddot{\phi} = \ddot{x}_A \sin\phi - \ddot{y}_A \cos\phi$.
Η $\hat{r}$ συνιστώσα δίνει $F = mL\dot{\phi}^2 - m\vec{a}_A \cdot \hat{r}$. Πρέπει $F \geq 0$ για να είναι τεντωμένο το νήμα.



(β) Είναι $\ddot{x}_A = -L\omega^2$ και $\ddot{y}_A = 0$, επομένως ισχύει $L\ddot{\phi} = \ddot{x}_A \sin\phi - \ddot{y}_A \cos\phi \Leftrightarrow \ddot{\phi} + \omega^2 \sin\phi = 0$, δηλ. εξίσωση εκκρεμούς.
Αρχικά $x|_{t=0} = L\cos\epsilon$ και $y|_{t=0} = L\sin\epsilon$, δηλ. $\phi|_{t=0} = \epsilon$. Η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική (και στα δύο συστήματα αφού και η ταχύτητα του Α είναι αρχικά μηδενική), άρα $\dot{\phi}|_{t=0} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική θέση είναι ακραία και το σώμα θα ταλαντώνεται μεταξύ των θέσεων $-\epsilon \leq \phi \leq \epsilon$. Θα ισχύει σε κάθε χρόνο $|\phi| \ll 1$ και η εξίσωση απλοποιείται (με $\sin\phi \approx \phi$) σε $\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$. Η γενική λύση είναι $\phi = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$. Από τις αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = \epsilon \Leftrightarrow C_2 = \epsilon$ και $\dot{\phi}|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$. Η λύση είναι λοιπόν $\phi = \epsilon\cos(\omega t)$.
(γ) Είναι $\ddot{x}_A = -R\omega^2 \cos(\omega t)$ και $\ddot{y}_A = -R\omega^2 \sin(\omega t)$, επομένως ισχύει $L\ddot{\phi} = \ddot{x}_A \sin\phi - \ddot{y}_A \cos\phi = -R\omega^2 [\sin\phi\cos(\omega t) - \cos\phi\sin(\omega t)] = -R\omega^2 \sin(\phi - \omega t)$. Θέτοντας $\theta = \phi - \omega t$ (και $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$) προκύπτει πάλι εξίσωση εκκρεμούς $\ddot{\theta} + \dfrac{\omega^2 R}{L} \sin\theta = 0$.
Αν μελετήσουμε την κίνηση στο σύστημα με αρχή το Α και άξονες που περιστρέφονται με την γωνιακή ταχύτητα ω του Α, ώστε ο άξονας x να είναι η προέκταση της ΚΑ προς το Α, πρέπει γενικά να προσθέσουμε επιπλέον την Coriolis και την φυγόκεντρο. Αυτές έχουν όμως μόνο ακτινική συνιστώσα, επομένως η αζιμουθιακή συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει (χρησιμοποιούμε εδώ θ για την αζιμουθιακή γωνία για να μην την συγχέουμε με την ϕ του προηγούμενου συστήματος) $\vec{a}_\sigma \cdot \hat{\theta} = -\vec{a}_0 \cdot \hat{\theta}$ όπου $\vec{a}_\sigma = -L\dot{\theta}^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}$ και $\vec{a}_0 = -\omega^2 R\hat{x}$, δηλ. $L\ddot{\theta} = \omega^2 R\hat{x} \cdot \hat{\theta} = -\omega^2 R \sin\theta$.



2.



(α) Ο νόμος Νεύτωνα είναι $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}$, με σταθερή $\vec{g}$ γιατί η κίνηση γίνεται κοντά στην επιφάνεια της Γης (κάτι που συμπεραίνουμε από το δεδομένο ότι το s είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης). Σε σύστημα με αρχή το σημείο αφετηρίας του σώματος, x προς ανατολάς, y προς βορρά και z προς ναδίρ η γωνιακή ταχύτητα είναι $\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\hat{y} + \omega\sin\lambda\hat{z}$, η επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = -g\hat{z}$ και οι αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0\cos(45°) = v_0/\sqrt{2}$ και $\dot{z}_0 = v_0\cos(45°) = v_0/\sqrt{2}$.

Ο νόμος Νεύτωνα $\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} = -g\hat{z} - 2\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \omega\cos\lambda & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda - 2\omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos\lambda \end{array}\right\}$ καταρχάς ολοκληρώνεται μία φορά και δίνει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης) $\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda - 2\omega z\cos\lambda\,, & ① \\ \dot{y} = v_0/\sqrt{2} - 2\omega x\sin\lambda\,, & ② \\ \dot{z} = v_0/\sqrt{2} - gt + 2\omega x\cos\lambda\,. & ③ \end{array}\right\}$

Το σύστημα μπορεί να λυθεί διαταρακτικά, διότι η επίδραση της περιστροφής είναι μικρή, δηλ. οι όροι που είναι ανάλογοι του ω είναι πολύ μικροί. Η ① δείχνει ότι η $x(t)$ είναι τάξης ω (χωρίς περιστροφή θα έδινε λύση $x = x_0 = 0$). Επομένως για να βρούμε την πρώτης τάξης διόρθωση λόγω της περιστροφής (δηλ. να κρατήσουμε όρους το πολύ ανάλογους του ω) πρέπει στο δεξιό μέλος της ① να αντικαταστήσουμε την μηδενικής τάξης λύση για τα $y(t)$ και $z(t)$. Οι τελευταίες βρίσκονται από τις ② και ③ με $\omega = 0$. Ολοκληρώνοντας αυτές τις εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τις μηδενικής τάξης λύσεις $y = \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}$, $z = \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}} - \dfrac{gt^2}{2}$. Η αντικατάσταση στην ① δίνει $\dot{x} = 2\omega\dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}\sin\lambda - 2\omega\left(\dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}} - \dfrac{gt^2}{2}\right)\cos\lambda$, η ολοκλήρωση της οποίας δίνει (χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες) $x = \omega\left(\dfrac{v_0 t^2}{\sqrt{2}}\sin\lambda - \dfrac{v_0 t^2}{\sqrt{2}}\cos\lambda + \dfrac{gt^3}{3}\cos\lambda\right)$. Το σώμα ξαναπέφτει στη Γη σε χρόνο τ στον οποίο $z = 0 \Leftrightarrow \tau = \sqrt{2}v_0/g$ (πάλι μας ενδιαφέρει μόνο το μηδενικής τάξης αποτέλεσμα γιατί τυχόν διόρθωση του τ λόγω περιστροφής θα δώσει όρο $\propto \omega^2$ στην x). Επομένως η απόκλιση στην διεύθυνση ανατολή-δύση (σε πρώτη τάξη ως προς ω) είναι $x = \omega\left(\dfrac{v_0\tau^2}{\sqrt{2}}\sin\lambda - \dfrac{v_0\tau^2}{\sqrt{2}}\cos\lambda + \dfrac{g\tau^3}{3}\cos\lambda\right) = \omega\dfrac{v_0^3\sqrt{2}}{g^2}\left(\sin\lambda - \dfrac{1}{3}\cos\lambda\right)$.

Το βεληνεκές s σε μηδενική τάξη είναι η τιμή του y για $t = \tau$, δηλ. είναι $s = \dfrac{v_0\tau}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{gs}$. Αντικαθιστώντας $v_0 = \sqrt{gs}$ στην έκφραση του x (πάλι μας ενδιαφέρει μόνο το μηδενικής τάξης αποτέλεσμα αφού θέλουμε το x μέχρι τάξη ω) βρίσκουμε την ζητούμενη $x = \omega\sqrt{\dfrac{2s^3}{g}}\left(\sin\lambda - \dfrac{1}{3}\cos\lambda\right)$.

Μπορούμε να λύσουμε διαταρακτικά την διανυσματική εξίσωση $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}$, όπως κάναμε σε παρόμοιο πρόβλημα στο μάθημα. Για την αδιατάρακτη τροχιά $\ddot{\vec{r}}^{(0)} = \vec{g} \Leftrightarrow \dot{\vec{r}}^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Leftrightarrow \vec{r}^{(0)} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$.
Προσθέτουμε διαταραχή, δηλ. θεωρούμε $\vec{r} = \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)}$ όπου ο όρος που προσθέσαμε είναι τάξης ω. Αντικαθιστώντας στον νόμο Νεύτωνα και κρατώντας μέχρι όρους ανάλογους του ω προκύπτει $\ddot{\vec{r}}^{(0)} + \ddot{\vec{r}}^{(1)} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}^{(0)}$ (η δύναμη Coriolis είναι ήδη ανάλογη του ω, οπότε στην ταχύτητα συνεισφέρει μόνο ο μηδενικής τάξης όρος). Λόγω της $\ddot{\vec{r}}^{(0)} = \vec{g}$ μένουν μόνο όροι πρώτης τάξης $\ddot{\vec{r}}^{(1)} = -2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}^{(0)}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται και δίνει $\dot{\vec{r}}^{(1)} - 0 = -2\vec{\omega}\times\left(\vec{r}^{(0)} - \vec{r}_0\right)$ (η αρχική τιμή της $\dot{\vec{r}}^{(1)}$ πρέπει να είναι μηδενική ώστε για $t = 0$ να ισχύει $\vec{v} = \dot{\vec{r}}^{(0)} + \dot{\vec{r}}^{(1)} = \vec{v}_0$ – γενικά οι διαταραχές πρέπει να μηδενίζονται αρχικά διότι οι αρχικές συνθήκες ήδη ικανοποιούνται από την μηδενικής τάξης λύση). Είναι λοιπόν $\dot{\vec{r}}^{(1)} = -2\vec{\omega}\times(\vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2) = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_0 t - \vec{\omega}\times\vec{g}t^2$. Ολοκληρώνοντας ξανά και απαιτώντας η διαταραχή να μηδενίζεται αρχικά βρίσκουμε $\vec{r}^{(1)} = -\vec{\omega}\times\vec{v}_0 t^2 - \vec{\omega}\times\vec{g}t^3/3$, οπότε η θέση σε κάθε χρόνο είναι $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2 - \vec{\omega}\times\vec{v}_0 t^2 - \vec{\omega}\times\vec{g}t^3/3 + \mathcal{O}(\omega^2)$.
(Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί αν θέλουμε να βρούμε διορθώσεις επόμενης τάξης. Για να βρούμε την

επόμενη διόρθωση $\vec{r}^{(2)}$ που είναι ανάλογη του ω^2, αντικαθιστώντας στον νόμο Νεύτωνα $\vec{r} = \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)} + \vec{r}^{(2)}$ και κρατώντας όρους μέχρι ανάλογους του ω^2 βρίσκουμε $\ddot{\vec{r}}^{(2)} = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^{(1)}$. Ολοκληρώνοντας δύο φορές βρίσκουμε $\dot{\vec{r}}^{(2)} = -2\vec{\omega} \times \vec{r}^{(1)} = -2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{v}_0 t^2 - \vec{\omega} \times \vec{g} t^3/3) \Leftrightarrow \vec{r}^{(2)} = 2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_0)\, t^3/3 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g})\, t^4/6$. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα αρκεί να βρούμε το αποτέλεσμα κρατώντας όρους $\propto \omega$.)
Για να βρούμε την απόκλιση στην διεύθυνση ανατολή-δύση συνεχίζουμε όμοια με πριν, δηλ. με $\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\hat{y} + \omega\sin\lambda\hat{z}$, $\vec{g} = -g\hat{z}$ και αρχικές συνθήκες $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{v}_0 = v_0\cos(45°)\hat{y} + v_0\cos(45°)\hat{z} = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{y} + \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{z}$ προκύπτει $\vec{r} = \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}\hat{y} + \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}\hat{z} - \dfrac{1}{2}gt^2\hat{z} - \omega\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}t^2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \omega\dfrac{gt^3}{3} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ και οι συντεταγμένες είναι σε κάθε χρόνο $x = \omega\left(\dfrac{v_0 t^2}{\sqrt{2}}\sin\lambda - \dfrac{v_0 t^2}{\sqrt{2}}\cos\lambda + \dfrac{gt^3}{3}\cos\lambda\right)$, $y = \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}$, $z = \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}gt^2$. Το σώμα ξαναπέφτει στη Γη όταν $z = 0$ (η επιφάνεια της Γης είναι τοπικά το επίπεδο $z = 0$), δηλ. στον τελικό χρόνο $t = \tau = \sqrt{2}v_0/g$. Στον χρόνο αυτό είναι $y = s$, δηλ. $\dfrac{v_0\tau}{\sqrt{2}} = s \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{gs}$. Η απόκλιση προκύπτει μόνο στην διεύθυνση ανατολή-δύση (σε πρώτη τάξη ως προς ω) και είναι $x = \omega\left(v_0\dfrac{\tau^2}{\sqrt{2}}\sin\lambda - v_0\dfrac{\tau^2}{\sqrt{2}}\cos\lambda + g\dfrac{\tau^3}{3}\cos\lambda\right) = \omega\dfrac{v_0^3\sqrt{2}}{g^2}\left(\sin\lambda - \dfrac{1}{3}\cos\lambda\right)$, η οποία λόγω της $v_0 = \sqrt{gs}$ γράφεται όπως η ζητούμενη $x = \omega\sqrt{\dfrac{2s^3}{g}}\left(\sin\lambda - \dfrac{1}{3}\cos\lambda\right)$.

Σημειώστε επίσης ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ①, ②, ③ μπορεί να επιλυθεί ακριβώς. Ένας τρόπος που μπορεί να εφαρμοστεί στο συγκεκριμένο σύστημα βασίζεται σε διαδοχικές αντικαταστάσεις. Η ② δίνει $x = \dfrac{v_0/\sqrt{2} - \dot{y}}{2\omega\sin\lambda}$. ④ Αντικαθιστώντας στην ① προκύπτει $z = y\tan\lambda + \dfrac{\ddot{y}}{4\omega^2\sin\lambda\cos\lambda}$. ⑤ Αντικαθιστώντας και τις δύο στην ③ προκύπτει $\dfrac{1}{4\omega^2}\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{dy}{dt} = -gt\sin\lambda\cos\lambda + \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\cos\lambda\,(\sin\lambda + \cos\lambda)$. Η γενική λύση της τελευταίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς (που βρίσκεται μέσω του χαρακτηριστικού πολυώνυμου) και μιας μερικής λύσης (που εδώ είναι το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους), δηλ. $y = C_1 + C_2\sin(2\omega t) + C_3\cos(2\omega t) - \dfrac{1}{2}gt^2\sin\lambda\cos\lambda + \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}\cos\lambda\,(\sin\lambda + \cos\lambda)$, οπότε οι ④, ⑤ δίνουν $x = \dfrac{v_0}{2\sqrt{2}\omega}(\sin\lambda - \cos\lambda) - \dfrac{C_2\cos(2\omega t)}{\sin\lambda} + \dfrac{C_3\sin(2\omega t)}{\sin\lambda} + \dfrac{gt\cos\lambda}{2\omega}$ και $z = C_1\tan\lambda - C_2\cot\lambda\sin(2\omega t) - C_3\cot\lambda\cos(2\omega t) - \dfrac{1}{2}gt^2\sin^2\lambda + \dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}\sin\lambda\,(\sin\lambda + \cos\lambda) - \dfrac{g}{4\omega^2}$. Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τις σταθερές $C_1 = \dfrac{g}{4\omega^2}\sin\lambda\cos\lambda$, $C_2 = \dfrac{v_0}{2\omega\sqrt{2}}\sin\lambda(\sin\lambda - \cos\lambda)$, $C_3 = -C_1$ και τελικά την θέση σε κάθε χρόνο, η οποία μπορεί να γραφεί σαν

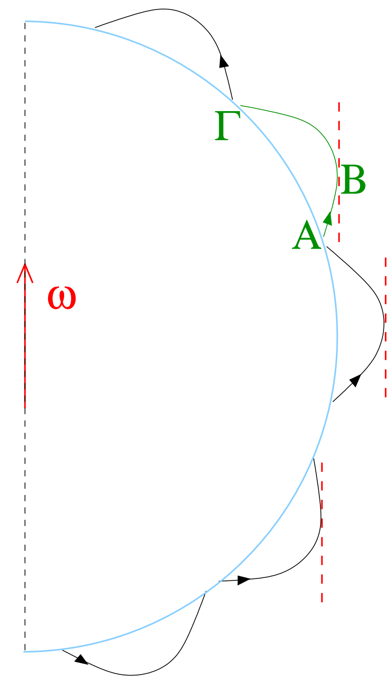
$$x = \frac{\omega v_0 t^2}{\sqrt{2}}(\sin\lambda - \cos\lambda)\underbrace{\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2\omega^2 t^2}}_{1+\mathcal{O}(\omega^2 t^2)} + \frac{\omega g t^3}{3}\cos\lambda\underbrace{\frac{6\omega t - 3\sin(2\omega t)}{4\omega^3 t^3}}_{1+\mathcal{O}(\omega^2 t^2)},$$

$$y = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{v_0 t}{\sqrt{2}}\sin\lambda(\sin\lambda - \cos\lambda)\underbrace{\left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega t} - 1\right]}_{\mathcal{O}(\omega^2 t^2)} + \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda\cos\lambda\underbrace{\left[\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2\omega^2 t^2} - 1\right]}_{\mathcal{O}(\omega^2 t^2)},$$

$$z = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{v_0 t}{\sqrt{2}}\cos\lambda(\sin\lambda - \cos\lambda)\underbrace{\left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega t} - 1\right]}_{\mathcal{O}(\omega^2 t^2)} - \frac{gt^2\cos^2\lambda}{2}\underbrace{\left[\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2\omega^2 t^2} - 1\right]}_{\mathcal{O}(\omega^2 t^2)},$$

μορφή που δείχνει ότι αν αγνοήσουμε όρους τάξης $\omega^2 t^2$ (κάτι που δικαιολογείται αφού η διάρκεια της κίνησης είναι πολύ μικρότερη από μία ημέρα) καταλήγουμε στην λύση που βρέθηκε διαταρακτικά.

(β) Έστω η βολή που φαίνεται με πράσινο χρώμα στο δίπλα σχήμα. Στο διάστημα ΑΒ όπου η ταχύτητα έχει φορά «δεξιότερα» της $\vec{\omega}$ (με άλλα λόγια η προβολή της $\vec{v}$ κάθετα στην $\vec{\omega}$ έχει φορά προς τα «δεξιά») η Coriolis $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}$ έχει φορά προς την δύση. Αντίθετα στο τμήμα ΒΓ έχει φορά προς την ανατολή. Η τελική απόκλιση όταν το σώμα φτάσει ξανά στο έδαφος εξαρτάται από το ποια επίδραση κυριαρχεί.



Όπως φαίνεται στο σχήμα για βολές κοντά στον βόρειο πόλο δεν υπάρχει καν το τμήμα ΑΒ δηλ. η Coriolis έχει συνεχώς φορά προς ανατολή, άρα και η απόκλιση θα είναι προς ανατολή.

Όμοια για βολές κοντά στον νότιο πόλο δεν υπάρχει καν το τμήμα ΒΓ δηλ. η Coriolis έχει συνεχώς φορά προς δύση, άρα και η απόκλιση θα είναι προς δύση.

Σε ενδιάμεσα πλάτη που υπάρχουν και τα δύο τμήματα έχει σημασία ότι η Coriolis πρώτα έχει φορά προς δύση και κατόπιν προς ανατολή. Για παράδειγμα στον ισημερινό που τα δύο μέρη είναι ίσα και άρα η Coriolis δρα ίσο χρόνο προς δύση και ανατολή, έχει σημασία ότι η αρχική επίδραση θα είναι απόκλιση προς δύση που θα δώσει ταχύτητα $v_x < 0$. Στο επόμενο διάστημα που η Coriolis έχει φορά προς ανατολή απλά μειώνει κατά μέτρο την ταχύτητα (στην συγκεκριμένη περίπτωση μέχρι μηδενισμού της v_x), αλλά το σώμα συνεχίζει να αποκλίνει προς την δύση. Σε σημεία με σχετικά μικρά θετικά πλάτη η Coriolis έχει αρχικά φορά προς δύση, αλλά μετά έχει φορά προς ανατολή για περισσότερο χρόνο, κάτι που σημαίνει ότι η v_x γίνεται θετική προς το τέλος της τροχιάς. Για να μπορέσει όμως να αναιρέσει την προηγούμενη απόκλιση προς την δύση και το τελικό ισοζύγιο να είναι απόκλιση προς την ανατολή πρέπει να είναι $v_x > 0$ σε αρκούντως μεγάλο χρονικό διάστημα (ώστε $\int_0^\tau v_x dt > 0$). Το αποτέλεσμα δείχνει ότι αυτό συμβαίνει για $\sin\lambda > \frac{1}{3}\cos\lambda \Leftrightarrow \lambda > \arctan(1/3) \approx 18.4^{\mathrm{o}}$ (για τις βολές υπό γωνία 45^{o} που εξετάσαμε).

---

3. (α) $m\ddot{x} = -m(\omega^2+\gamma^2)x - 2m\gamma\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (\omega^2+\gamma^2)x = 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 + \gamma^2 = 0$ και έχει λύσεις $\lambda = -\gamma \pm i\omega$ επομένως η γενική λύση είναι θέση $x = e^{-\gamma t}\left[C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\right]$ και ταχύτητα $v = -\gamma x + \omega e^{-\gamma t}\left[C_1\cos(\omega t) - C_2\sin(\omega t)\right]$.

Οι αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = A$ και $v|_{t=0} = 0$ δίνουν $C_2 = A$ και $C_1 = \gamma A/\omega$ επομένως η λύση είναι $x = \frac{A}{\omega}e^{-\gamma t}\left[\gamma\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t)\right]$, $v = -\frac{A}{\omega}(\omega^2+\gamma^2)e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$.

(β) Ξανασταματά για $t = \pi/\omega$ στη θέση $x = -Ae^{-\gamma\pi/\omega}$, άρα έχει διανύσει $|A|(1+e^{-\gamma\pi/\omega})$.

(γ) Η εξίσωση κίνησης είναι τώρα $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (\omega^2+\gamma^2)x = \frac{f_0}{m}\cos(\omega t)$. Η γενική λύση της ομογενούς βρέθηκε πριν $x_{\text{ομ}} = e^{-\gamma t}\left[C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\right]$ και σε «μεγάλους» χρόνους μηδενίζεται λόγω του εκθετικού $e^{-\gamma t}$. Επομένως σε «μεγάλους» χρόνους θα είναι $x \approx x_{\text{μερ}}$, η μερική λύση της διαφορικής.

Ένας τρόπος να βρούμε την μερική λύση είναι να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση κίνησης είναι το πραγματικό μέρος της διαφορικής $\ddot{\zeta} + 2\gamma\dot{\zeta} + (\omega^2+\gamma^2)\zeta = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t}$ με $x = \Re\zeta$. Η μερική λύση αυτής είναι $\zeta = Be^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $B = \frac{f_0}{m\gamma(\gamma+2i\omega)} = \frac{f_0(\gamma-2i\omega)}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}$. Άρα $x = \Re\zeta = \Re\left[\frac{f_0(\gamma-2i\omega)}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}e^{i\omega t}\right] = \Re\left\{\frac{f_0(\gamma-2i\omega)}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]\right\} = \frac{f_0}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}\left[2\omega\sin(\omega t) + \gamma\cos(\omega t)\right]$.

Αλλιώς: Η μερική λύση είναι της μορφής $x_{\text{μερ}} = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$ και η αντικατάσταση στην διαφορική δίνει $(-2\gamma\omega D+\gamma^2 C)\sin(\omega t)+(2\gamma\omega C+\gamma^2 D-f_0/m)\cos(\omega t)=0$. Οι συναρτήσεις $\sin(\omega t)$ και $\cos(\omega t)$ είναι ανεξάρτητες, άρα οι συντελεστές τους πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι έχουμε το σύστημα $-2\gamma\omega D+\gamma^2 C=0$, $2\gamma\omega C+\gamma^2 D-f_0/m=0$ που δίνει $C=\dfrac{2\omega f_0}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}$, $D=\dfrac{f_0}{m(\gamma^2+4\omega^2)}$.

(δ) Η ισχύς που προσφέρει ο διεγέρτης είναι κάθε στιγμή το γινόμενο της δύναμης με την ταχύτητα $P=f_0\cos(\omega t)\times\dfrac{f_0\omega}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}\left[2\omega\cos(\omega t)-\gamma\sin(\omega t)\right]=\dfrac{f_0^2\omega}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}\left[2\omega\cos^2(\omega t)-\gamma\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]$. Η μέση τιμή του $\cos^2(\omega t)=\dfrac{1+\cos(2\omega t)}{2}$ είναι $1/2$ και του $\sin(\omega t)\cos(\omega t)=\dfrac{\sin(2\omega t)}{2}$ είναι 0, οπότε η μέση ισχύς είναι $\langle P\rangle=\dfrac{f_0^2\omega^2}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}$.

Το ίδιο προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\langle P\rangle=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P\,dt$ όπου $T=2\pi/\omega$ η περίοδος (όλα αναφέρονται σε «μεγάλους» χρόνους και το ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα εύρους T μιας και η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο T).

Σε «μεγάλους» χρόνους όπου η ταλάντωση έχει σταθερό πλάτος τόσο η μεταβολή της κινητικής ενέργειας όσο και το έργο της δύναμης επαναφοράς είναι μηδενικά σε μια περίοδο, δηλ. έχουν μηδενική μέση τιμή. Επομένως η μέση ισχύς που δίνει ο διεγέρτης καταλήγει σε απώλειες μέσω της αντίστασης.

Αυτό φαίνεται και άμεσα από το ότι η μέση ισχύς της αντίστασης $\langle -2m\gamma\dot{x}^2\rangle$ είναι αντίθετη της μέσης ισχύος του διεγέρτη, διότι η ταχύτητα είναι $\dot{x}=\dfrac{f_0\omega}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}\left[2\omega\cos(\omega t)-\gamma\sin(\omega t)\right]$ και άρα $\langle -2m\gamma\dot{x}^2\rangle=$

$$-2m\gamma\left[\frac{f_0\omega}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}\right]^2\left[4\omega^2\underbrace{\langle\cos^2(\omega t)\rangle}_{1/2}-4\omega\gamma\underbrace{\langle\sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle}_{0}+\gamma^2\underbrace{\langle\sin^2(\omega t)\rangle}_{1/2}\right]=-\frac{f_0^2\omega^2}{m\gamma(\gamma^2+4\omega^2)}.$$

Στιγμιαία πάντως μέρος της ισχύος του διεγέρτη καταλήγει σε μηχανική ενέργεια, η οποία είναι το άθροισμα της κινητικής $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ και της δυναμικής $\frac{1}{2}m(\omega^2+\gamma^2)x^2$ του «ελατηρίου» που σχετίζεται με την δύναμη επαναφοράς. Παρότι σε «μεγάλους» χρόνους έχουμε ταλάντωση σταθερού πλάτους και κυκλικής συχνότητας ω, οπότε ισχύει $\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E=$ σταθερά, η μηχανική ενέργεια $E_{\text{μηχ}}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\omega^2+\gamma^2)x^2=E+\frac{1}{2}m\gamma^2x^2$ δεν είναι σταθερή (σε μια περίοδο βέβαια έχει μηδενική μεταβολή και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η ενέργεια που προσφέρει ο διεγέρτης σε μια περίοδο ισούται με τις απώλειες λόγω αντίστασης).