Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στην περιοχή $x > 0$ μέσα σε πεδίο $V(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3} + \frac{9}{x^4}$.
(α) Μελετήστε την συνάρτηση $V(x)$ στην περιοχή $x > 0$ και σχεδιάστε το γράφημα της.
(β) Υπάρχουν σημεία ισορροπίας; Στα τυχόν ευσταθή βρείτε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων.
(γ) Έστω αρχικά το σώμα ξεκινά με ταχύτητα $v_0 \leq 0$ από το σημείο $0 < x_0 < 2$ στο οποίο $V(x_0) = 5/72$.
(γ_1) Δείξτε ότι για $|v_0| < 1/\sqrt{108}$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση. Επιλέξτε μία συγκεκριμένη τιμή της v_0 και βρείτε γι΄ αυτή τα άκρα της κίνησης και την περίοδο της ταλάντωσης.
Αν χρειαστεί να λύσετε κάποια μη-τετριμμένη αλγεβρική εξίσωση μπορείτε να βρείτε την λύση αριθμητικά, π.χ. χρησιμοποιώντας την ιστοσελίδα https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/.
Επίσης το ορισμένο ολοκλήρωμα που δίνει την περίοδο δεν γίνεται να το υπολογίσετε αναλυτικά, μπορείτε επίσης να βρείτε την αριθμητική του τιμή μέσω της προηγούμενης ιστοσελίδας.
(γ_2) Υπάρχουν τιμές της v_0 για τις οποίες το σώμα καταλήγει σε ακινησία;
(γ_3) Για ποιες τιμές της v_0 το σώμα καταλήγει στο $x = +\infty$; Βρείτε την τελική ταχύτητά του για μια συγκεκριμένη τιμή της v_0 που θα επιλέξετε.
(δ) Σχεδιάστε τις διάφορες καμπύλες στο διάγραμμα φάσης και δείξτε σε αυτό τις τροχιές που αντιστοιχούν στα προηγούμενα ερωτήματα.

---

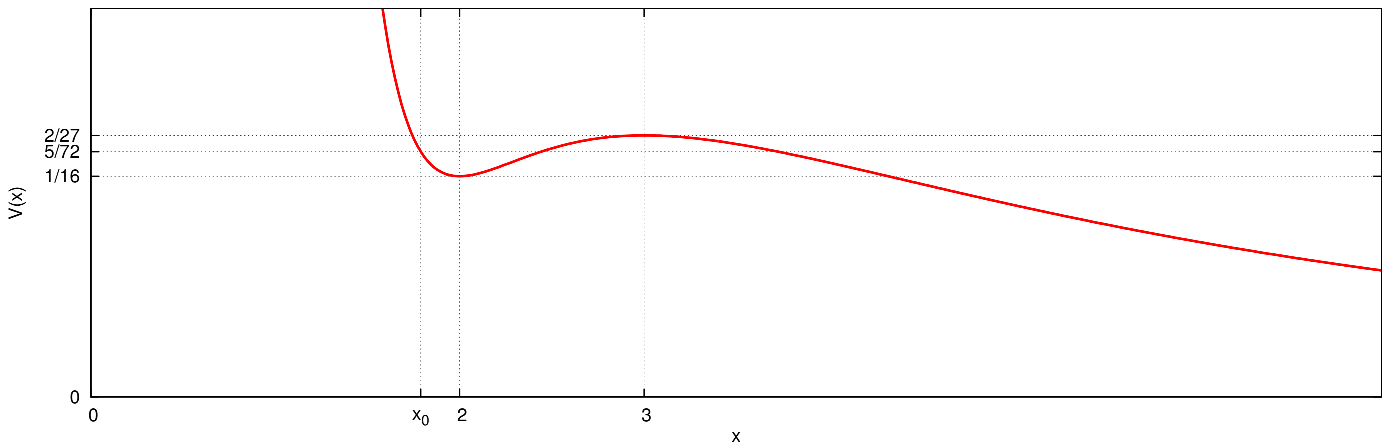
2. Φορτίο q μάζας m κινείται στο επίπεδο Oxy μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 e^{y/y_0}\hat{z}$. Αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $\vec{r}_0 = 0$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$ με $0 < v_0 < 1$. Μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα μονάδες και να θέσουμε $y_0 = 1$, $m = 1$ και $qB_0 = 1$, οπότε ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $\vec{a} = e^y\vec{v} \times \hat{z}$.
(α) Δείξτε ότι η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα ολοκληρώνεται και δίνει $v_x = v_x(y)$ (συγκεκριμένη συνάρτηση την οποία πρέπει να βρείτε).
(β) Δείξτε ότι το πρόβλημα ανάγεται σε μονοδιάστατο $\ddot{y} = f(y)$. Βρείτε το αντίστοιχο δυναμικό $V(y)$ και γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας. Ποια η φυσική του σημασία;
(γ) Με την βοήθεια του γραφήματος του δυναμικού βρείτε τα όρια της κίνησης στην y κατεύθυνση.
(δ) Βρείτε την θέση του φορτίου σε κάθε χρόνο.
Δίνονται τα ολοκληρώματα $\int \frac{dy}{\sqrt{a + be^y + ce^{2y}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ae^{-y} + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} +$ σταθερά για $a < 0$, $b^2 > 4ac$ και $\int \frac{d\xi}{1 - \sin\lambda \sin\xi} = \frac{2}{\cos\lambda} \arctan \frac{\tan(\xi/2) - \sin\lambda}{\cos\lambda} +$ σταθερά.

---

3. Σημειακό σώμα μάζας m είναι δεμένο σε αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους R το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό (ιδανικό εκκρεμές). Στο σώμα εκτός του βάρους mg και της τάσης του νήματος ασκείται και αντίσταση αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλ. $F_a = \frac{m\cot\lambda}{2R}v^2$, όπου λ σταθερή οξεία γωνία. Το σώμα ξεκινά από το κατώτερο σημείο με οριζόντια ταχύτητα $v_0 = \sqrt{2gR}\sin\lambda$.
(α) Ποια διαφορική εξίσωση δίνει την $\frac{v^2}{2gR} = f(\phi)$ συναρτήσει της γωνίας από την κατακόρυφο ϕ;
(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα ανεβαίνει. Σε ποια θέση σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά;
(γ) Ελέγξτε αν το νήμα παραμένει τεντωμένο σε όλη την ανοδική κίνηση.
(δ) Ποια είναι η ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα κατεβαίνει; Με πόση ταχύτητα θα ξαναπεράσει για πρώτη φορά από το κατώτερο σημείο;
Δίνεται ότι η γενική λύση της $\frac{dy}{dx} \pm y\cot\lambda = -\sin x$ είναι η $y = De^{\mp x\cot\lambda} \mp \sin\lambda\cos\lambda\sin x + \sin^2\lambda\cos x$.

Λύσεις – Εργασία #3

1. (α) $V(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{9}{x^4}$ με παράγωγο $V' = -\dfrac{6}{x^3} + \dfrac{30}{x^4} - \dfrac{36}{x^5} = -\dfrac{6(x-2)(x-3)}{x^5}$, θετική στο $x \in (2,3)$ και αρνητική στα διαστήματα $(0,2)$ και $(3,+\infty)$. Άρα η $V(x)$ στην αρχή απειρίζεται $\lim_{x\to 0^+} V(x) = +\infty$, στην συνέχεια φθίνει μέχρι το $x = 2$ όπου έχει τοπικό ελάχιστο $V(2) = 1/16$, αυξάνεται μέχρι το $x = 3$ όπου έχει τοπικό μέγιστο $V(3) = 2/27$ και στην συνέχεια φθίνει μέχρι το άπειρο όπου μηδενίζεται.



(β) Τα σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα του δυναμικού, το $x = 2$ το οποίο είναι ευσταθές (αφού αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο) και το $x = 3$ που είναι ασταθές (αφού αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο).
Γύρω από το $x = 2$ είναι $V(x) \approx V(2) + \dfrac{1}{2}V''(2)(x-2)^2$ με $V''(2) = 3/16$ και η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = -V'(x) \Leftrightarrow \ddot{x} \approx -\dfrac{3}{16}(x-2)$, δηλ. εξίσωση ταλαντωτή με σημείο ισορροπίας το $x = 2$, κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{3}{16}}$ και περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{8\pi}{\sqrt{3}}$.
(γ_1) Από το γράφημα του δυναμικού φαίνεται ότι για να εκτελεί ταλάντωση το σώμα πρέπει $E < 2/27$. Αφού $E = \dfrac{v_0^2}{2} + V(x_0)$ και $V(x_0) = \dfrac{5}{72}$ πρέπει να ισχύει $\dfrac{v_0^2}{2} + \dfrac{5}{72} < \dfrac{2}{27} \Leftrightarrow |v_0| < \dfrac{1}{\sqrt{108}}$.

Για μια συγκεκριμένη τιμή της v_0 τα όρια της κίνησης είναι οι λύσεις της $V(x) = E \Leftrightarrow \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{9}{x^4} = \dfrac{v_0^2}{2} + \dfrac{5}{72}$ στο διάστημα $0 < x < 3$. Προκύπτει πολυωνυμική εξίσωση τετάρτου βαθμού η οποία επιλύεται αναλυτικά, αλλά καθόλου απλά. Χωρίς λεπτομέρειες για το πως προκύπτουν, οι λύσεις είναι οι

$x_{\min} = \dfrac{18}{5 + \sqrt{\eta} + \sqrt{21 - \eta - 20/\sqrt{\eta}}}$ και $x_{\max} = \dfrac{18}{5 + \sqrt{\eta} - \sqrt{21 - \eta - 20/\sqrt{\eta}}}$,

όπου $\eta = 7 + 3\sqrt{6(1-36v_0^2)}\,\cos\left\{\dfrac{1}{3}\arccos\left[\dfrac{1-252v_0^2}{\sqrt{6}(1-36v_0^2)^{3/2}}\right]\right\}$.

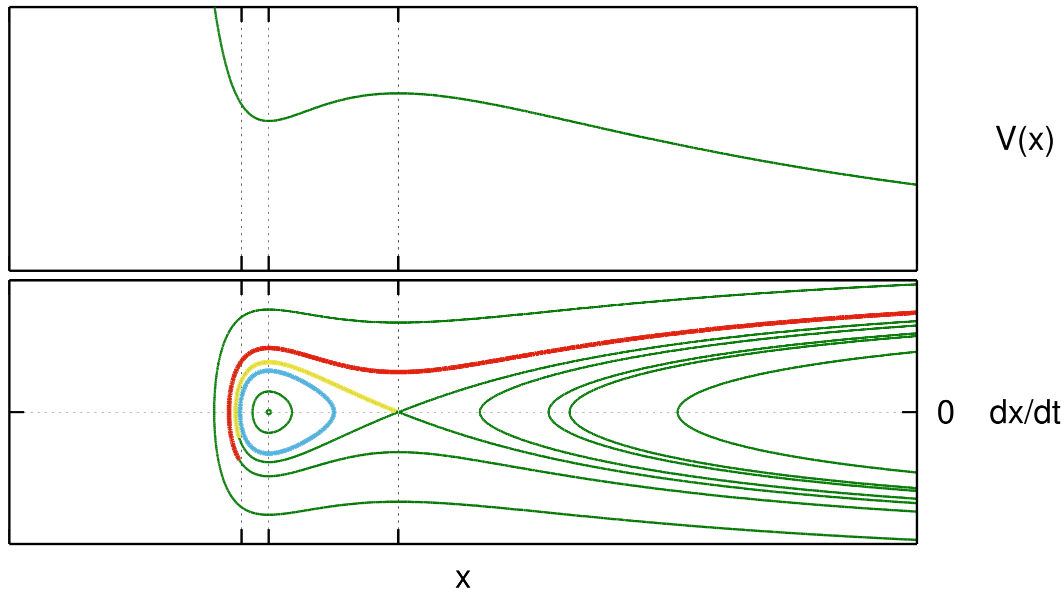
Η περίοδος είναι διπλάσια του χρόνου που χρειάζεται για να πάει το σώμα από το $x_{\min}$ στο $x_{\max}$ (η επιστροφή διαρκεί το ίδιο αφού το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε θέση είναι ίδιο). Για την κίνηση αυτή η ταχύτητα βρίσκεται από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dot{x} = +\sqrt{2[E - V(x)]} = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{5}{36} - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{20}{x^3} - \dfrac{18}{x^4}}$, δηλ. είναι $T = 2\displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\dot{x}} = 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{5}{36} - \frac{6}{x^2} + \frac{20}{x^3} - \frac{18}{x^4}}}$. Το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται αναλυτικά.

(γ_2) Η μόνη περίπτωση είναι να καταλήξει στο ασταθές σημείο ισορροπίας, δηλ. να είναι $E = V(3) \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} + \dfrac{5}{72} = \dfrac{2}{27} \Leftrightarrow |v_0| = 1/\sqrt{108}$ και αφού $v_0 < 0$ πρέπει $v_0 = -1/\sqrt{108}$. Στην περίπτωση αυτή το σώμα

κινείται αρχικά προς μικρότερα x, ανακλάται στην μικρότερη θετική λύση της $V(x) = V(3)$ και στη συνέχεια κινείται επ΄ άπειρον προς το σημείο $x = 3$.
(γ_3) Αρχικά το σώμα κινείται προς μικρότερα x και ανακλάται στην μικρότερη θετική λύση της $V(x) = E$. Στην συνέχεια για να φτάσει στο άπειρο πρέπει να περάσει τον λόφο δυναμικού. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $E > 2/27 \Leftrightarrow |v_0| > 1/\sqrt{108}$.

Από διατήρηση ενέργειας το σώμα θα έχει ταχύτητα v_∞ με $\dfrac{v_0^2}{2} + \dfrac{5}{72} = \dfrac{v_\infty^2}{2} + 0$ (διότι το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο), δηλ. $v_\infty = \sqrt{v_0^2 + 5/36}$.

(δ)



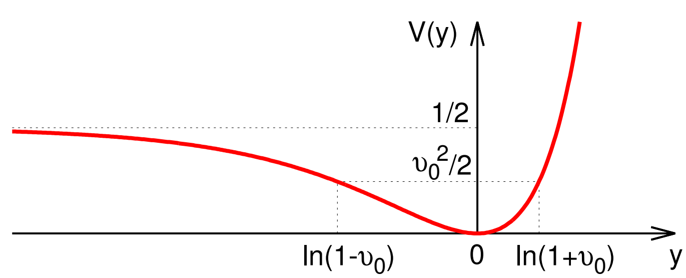
Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στο ερώτημα (γ_1), η κίτρινη στο (γ_2) και η κόκκινη στο (γ_3).

---

2. $\dot{\vec{v}} = e^y \vec{v} \times \hat{z} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = e^y v_y & ① \\ \dot{v}_y = -e^y v_x & ② \end{cases}$

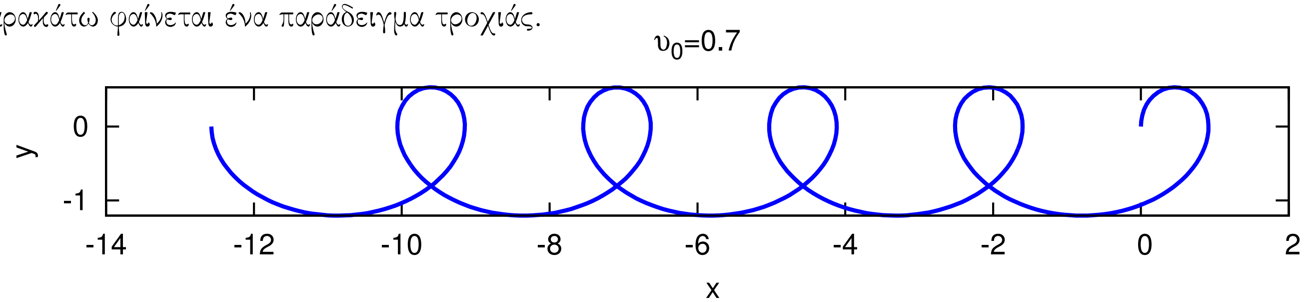
(α) Η ① δίνει $v_x = e^y +$ σταθερά και από αρχικές συνθήκες ($v_x = 0$ για $y = 0$) είναι $v_x = e^y - 1$.
(β) Αντικαθιστώντας στην ② προκύπτει $\ddot{y} = f(y)$ με $f(y) = e^y - e^{2y}$. Το αντίστοιχο δυναμικό είναι $V(y) = -\displaystyle\int \left(e^y - e^{2y}\right) dy = \dfrac{(e^y - 1)^2}{2} +$ σταθερά. Όπως αναμέναμε το δυναμικό είναι ίσο με $\dfrac{v_x^2}{2}$ (επιλέγοντας κατάλληλα την αυθαίρετη σταθερά) ώστε το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{y}^2}{2} + \dfrac{(e^y - 1)^2}{2} = E$ να εκφράζει την κινητική ενέργεια του φορτίου (η οποία διατηρείται αφού το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο).

(γ) $V = \dfrac{(e^y - 1)^2}{2}$. Η παράγωγος $V' = e^y(e^y - 1)$ είναι θετική για $y > 0$ και αρνητική για $y < 0$. Άρα η V έχει ασυμπτωτική τιμή $\lim\limits_{y \to -\infty} V(y) = -\dfrac{1}{2}$, είναι φθίνουσα στο διάστημα $-\infty < y < 0$, μηδενίζεται στο $y = 0$, είναι αύξουσα στο διάστημα $0 < y < +\infty$ και απειρίζεται ασυμπτωτικά $\lim\limits_{y \to +\infty} V(y) = +\infty$. Από αρχικές συνθήκες $E = \dfrac{v_0^2}{2}$. Η $V(y) = E$ δίνει τα όρια της τροχιάς $e^y = 1 \pm v_0$ δηλ. $y_{\min} = \ln(1 - v_0) < 0$ και $y_{\max} = \ln(1 + v_0) > 0$.



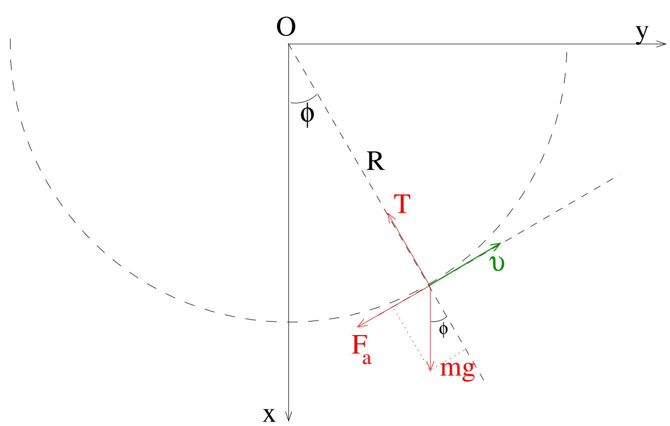
(δ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\dfrac{\dot{y}^2}{2} + \dfrac{(e^y - 1)^2}{2} = \dfrac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow \dot{y} = \pm\sqrt{v_0^2 - (e^y - 1)^2}$ και ολοκληρώνοντας

(είναι διαφορική χωριζομένων μεταβλητών) $\pm t = \int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - 1 + 2e^y - e^{2y}}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} \arcsin \frac{1-(1-v_0^2)e^{-y}}{v_0} +$ σταθερά, οπότε $\frac{1-(1-v_0^2)e^{-y}}{v_0} = \sin\left(t\sqrt{1-v_0^2}+\lambda\right)$ (η σταθερά ολοκλήρωσης λ έχει απορροφήσει το πρόσημο), ή, $y = \ln \frac{1-v_0^2}{1-v_0 \sin\left(t\sqrt{1-v_0^2}+\lambda\right)}$. Η ταχύτητα είναι $\dot{y} = \frac{v_0\sqrt{1-v_0^2}\cos\left(t\sqrt{1-v_0^2}+\lambda\right)}{1-v_0\sin\left(t\sqrt{1-v_0^2}+\lambda\right)}$.
Από τις αρχικές συνθήκες $y|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\lambda = v_0$ και $\dot{y}|_{t=0} = v_0 \Leftrightarrow \cos\lambda = \sqrt{1-v_0^2}$, δηλ. $\lambda = \arcsin v_0$ (η αρχική συνθήκη για την ταχύτητα μας χρειάζεται για να απορρίψουμε την λύση $\lambda = \pi - \arcsin v_0$ που επίσης ικανοποιεί την $y|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\lambda = v_0$, αλλά δίνει $\dot{y}|_{t=0} = -v_0$). Τελικά $y = \ln \frac{\cos^2\lambda}{1-\sin\lambda\sin(t\cos\lambda+\lambda)}$.
Ολοκληρώνοντας την $v_x = e^y - 1$ προκύπτει $x = \int_0^t \frac{\cos^2\lambda}{1-\sin\lambda\sin(t\cos\lambda+\lambda)}dt - t$ και σύμφωνα με το δοσμένο ολοκλήρωμα με $\xi = t\cos\lambda+\lambda$ προκύπτει $x = 2\arctan\frac{\tan\frac{t\cos\lambda+\lambda}{2} - \sin\lambda}{\cos\lambda} + \lambda - t$.
Με την βοήθεια των τριγονομετρικών ταυτοτήτων $\sin\lambda = 2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}$ και $\cos\lambda = 2\cos^2\frac{\lambda}{2} - 1$ προκύπτει $2\arctan\frac{\tan\frac{\lambda}{2} - \sin\lambda}{\cos\lambda} = -\lambda$.
Ο παραπάνω τύπος για την $x(t)$ ισχύει όσο $t\cos\lambda+\lambda<\pi$. Την στιγμή που $t\cos\lambda+\lambda=\pi$ απειρίζεται το όρισμα της arctan, για τον λόγο αυτό στον επόμενο κύκλο $\pi < t\cos\lambda+\lambda < 3\pi$ πρέπει να πάρω τον επόμενο κλάδο της αντίστροφης εφαπτομένης, δηλ. να προσθέσω π στο arctan, στον μεθεπόμενο 2π, κ.ο.κ. Είναι δηλ. $x = 2\arctan\frac{\tan\frac{t\cos\lambda+\lambda}{2} - \sin\lambda}{\cos\lambda} + \lambda - t + 2\pi\lfloor\frac{t\cos\lambda+\lambda+\pi}{2\pi}\rfloor$ όπου $\lfloor\xi\rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του ξ.
Παρακάτω φαίνεται ένα παράδειγμα τροχιάς.



---

3. Νόμος Νεύτωνα : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - \frac{m\cot\lambda}{2R}v^2\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.
Σε πολικές συντεταγμένες στο σύστημα με άξονα x κατακόρυφο προς τα κάτω και y οριζόντιο προς την αρχική φορά κίνησης, γράφεται $mR\ddot{\phi}\hat{\phi} - m\dot{\phi}^2R\hat{\varpi} = mg\cos\phi\hat{\varpi} - mg\sin\phi\hat{\phi} - T\hat{\varpi} - \frac{m\cot\lambda}{2R}|\vec{v}|\vec{v}$, $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$.
Άρα η εφαπτομενική του συνιστώσα είναι $mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - \frac{mR\cot\lambda}{2}|\dot{\phi}|\dot{\phi}$ και δίνει την γωνία $\phi(t)$, ενώ η ακτινική συνιστώσα είναι $-m\dot{\phi}^2R = mg\cos\phi - T$ και δίνει την τάση του νήματος T.



(α) Κατά το ανέβασμα ισχύει $\dot{\phi} > 0$ και άρα η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι $mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - \frac{mR\cot\lambda}{2}\dot{\phi}^2$. Με $\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}$ και $\dot{\phi}^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{2g}{R}f$ δίνει $\frac{df}{d\phi} + f\cot\lambda = -\sin\phi$.

(β) Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται $f = De^{-\phi\cot\lambda} - \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi$.
Η λύση της ομογενούς είναι $De^{-\phi\cot\lambda}$. Μια μερική λύση είναι η $A\sin\phi + B\cos\phi$. Η αντικατάσταση δίνει $A + B\cot\lambda = 0$ και $-B + A\cot\lambda = -1$, δηλ. $A = -\sin\lambda\cos\lambda$ και $B = \sin^2\lambda$. Άρα η γενική λύση είναι $f = De^{-\phi\cot\lambda} - \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi = De^{-\phi\cot\lambda} - \sin\lambda\sin(\phi - \lambda)$.
$f|_{\phi=0} = \frac{v_0^2}{2gR} = \sin^2\lambda$ οπότε $D = 0$ και σε κάθε θέση $\frac{v^2}{2gR} = \sin\lambda\,(\sin\lambda\cos\phi - \sin\phi\cos\lambda)$. Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $\tan\phi = \tan\lambda \Leftrightarrow \phi = \lambda$ (αυτή είναι η μικρότερη θετική λύση).

(γ) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει σε κάθε θέση $T = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\phi$. Προφανώς η τάση είναι θετική για $0 \le \phi \le \lambda$ (με δεδομένο ότι η λ είναι οξεία γωνία).

(δ) Στη συνέχεια το σώμα αρχίζει να κατεβαίνει και $\dot{\phi} < 0$. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι $mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + \frac{mR\cot\lambda}{2}\dot{\phi}^2$ και όμοια με πριν δίνει $\frac{df}{d\phi} - f\cot\lambda = -\sin\phi$. Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται $f = D'e^{\phi\cot\lambda} + \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi$. Η αρχική (για το κατέβασμα) συνθήκη $f|_{\phi=\lambda} = 0$ προσδιορίζει την σταθερά ολοκλήρωσης $D' = -2\sin^2\lambda\cos\lambda e^{-\lambda\cot\lambda}$, οπότε $\frac{v^2}{2gR} = -2\sin^2\lambda\cos\lambda e^{(\phi-\lambda)\cot\lambda} + \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi$. Θέτοντας $\phi = 0$ βρίσκουμε ότι το σώμα θα ξαναπεράσει για πρώτη φορά από την κατώτερη θέση με ταχύτητα μέτρου $v = v_0\sqrt{1 - 2\cos\lambda e^{-\lambda\cot\lambda}}$.
