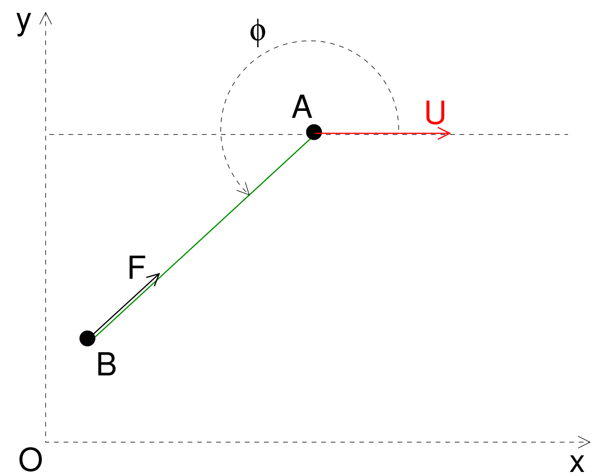
Μηχανική Ι – Εργασία #2

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 — Ν. Βλαχάκης

---

1. Δύο σώματα Α και Β μαζών m βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και είναι δεμένα μεταξύ τους με αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους L. Αρχικά το Α βρίσκεται στο σημείο $L\hat{y}$ ενώ το Β στην αρχή των αξόνων. Από κάποια στιγμή ($t = 0$) και μετά κάποιος κινεί το Α ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα $U\hat{x}$, οπότε και το Β θα αρχίσει να κινείται και θα έχει θέση $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ σε κάθε μεταγενέστερο χρόνο.



(α) Βρείτε την θέση του Α σε κάθε χρόνο $\vec{r}_A = x_A\hat{x} + y_A\hat{y}$ και δικαιολογήστε γιατί η δύναμη που ασκείται στο Β είναι της μορφής $\vec{F} = F\dfrac{Ut - x}{L}\hat{x} + F\dfrac{L - y}{L}\hat{y}$.
(β) Γράψτε τις τρεις εξισώσεις που δίνουν τα $x(t)$, $y(t)$ και το μέτρο της δύναμης F (χρησιμοποιήστε τον νόμο Νεύτωνα για το σώμα Β και τον σύνδεσμο σταθερής απόστασης μεταξύ των Α και Β).
(γ) Οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται αν θέσουμε $x = x_A + L\cos\phi$ και $y = y_A + L\sin\phi$ (αν δηλ. χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες στο σύστημα αναφοράς με αρχή το Α). Κάντε τις αλλαγές και επιλύστε τις νέες εξισώσεις για να βρείτε τις $\phi(t)$ και F. Ποιες είναι οι $x(t)$, $y(t)$ και F; (Τα αποτελέσματα πρέπει να εξαρτώνται μόνο από τα δεδομένα m, L, U και τον χρόνο t.) Περιγράψτε την κίνηση του Β.
(δ) Ποια η δύναμη που ασκεί στο Α ο εξωτερικός παράγοντας και ποια η ισχύς που δαπανά; Δείξτε ότι η ισχύς αυτή ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας των δύο μαζών.
(ε) Αν σκεφτόμασταν εξ αρχής την κίνηση του Β στο σύστημα του Α (το οποίο είναι αδρανειακό), η απόσταση από το κέντρο (δηλ. το Α) είναι σταθερή και η δύναμη (άρα και η επιτάχυνση) έχει φορά προς το κέντρο. Δείξτε ότι αυτά συνεπάγονται ομαλή κυκλική κίνηση.

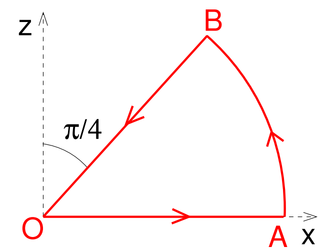
---

2. Είναι γνωστό ότι η κατακόρυφη κίνηση σωμάτων μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο δεν επηρεάζεται από τυχόν οριζόντια αρχική ταχύτητα. Αυτόν τον «μύθο» έλεγξαν οι MythBusters σ΄ ένα τους επεισόδιο (https://www.youtube.com/watch?v=tF_zv3TCT1U). Έριξαν με πιστόλι μια σφαίρα οριζόντια με ταχύτητα $v_0 = 255$ m/s από ύψος $h = 0.91$ m και ταυτόχρονα άφησαν μια ίδια σφαίρα να πέσει από το ίδιο ύψος. Μέτρησαν ότι η πρώτη φτάνει στο έδαφος ~ 40 χιλιοστά του δευτερολέπτου μετά την δεύτερη, χρονική διαφορά την οποία θεώρησαν αμελητέα και συμπέραναν ότι ο μύθος επιβεβαιώθηκε. Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσον η αντίσταση του αέρα επηρεάζει σημαντικά την κίνηση της πρώτης σφαίρας – λόγω της μεγάλης της ταχύτητας – και αν είναι υπεύθυνη για την παρατηρούμενη χρονική διαφορά.
(α) Καταρχάς βρείτε την θέση $\vec{r}_{(0)}(t)$ της πρώτης σφαίρας υποθέτοντας ότι σε αυτή ασκείται μόνο το βάρος της, βρείτε σε πόσο χρόνο $\tau_{(0)}$ φτάνει στο έδαφος και διαπιστώστε ότι είναι ίδιος με τον χρόνο ελεύθερης πτώσης.
(β) Έστω στην σφαίρα ασκείται επιπλέον δύναμη αντίστασης $-\lambda m|\vec{v}|\vec{v}$, όπου $\vec{v}$ η στιγμιαία ταχύτητά της και $\lambda = \dfrac{C_D \rho \pi L^2}{8m}$, με $C_D = 0.3$, $\rho = 1.22$ kg/m^3 (πυκνότητα αέρα), $L = 11.5 \times 10^{-3}$ m (διάμετρος σφαίρας) και $m = 15 \times 10^{-3}$ kg (μάζα σφαίρας).
Μιας και η επίδραση της αντίστασης είναι μικρή η λύση μπορεί να βρεθεί διαταρακτικά, κρατώντας μόνο όρους το πολύ ανάλογους του λ. Επίσης μιας και η κατακόρυφη ταχύτητα είναι πολύ μικρότερη της οριζόντιας μπορούμε να προσεγγίσουμε $\lambda|\vec{v}| \approx \lambda v_0$.
(β_1) Γράφοντας την θέση σαν $\vec{r} = \vec{r}_{(0)}(t) + \lambda\vec{\xi}(t)$ δείξτε ότι ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\ddot{\vec{\xi}} = -v_0(\vec{v}_0 + \vec{g}t)$.

(β$_2$) Ολοκληρώστε την εξίσωση αυτή, βρείτε την $\vec{\xi}(t)$ και άρα την $\vec{r}(t)$.
(β$_3$) Γράψτε την συνθήκη που καθορίζει τον χρόνο πτώσης τ.
Ο χρόνος αυτός διαφέρει λίγο από τον χρόνο ελεύθερης πτώσης $\tau_{(0)}$, δηλ. είναι $\tau = \tau_{(0)}(1+\lambda\delta)$. Αντικαθιστώντας στην συνθήκη και κρατώντας όρους μέχρι ανάλογους του λ βρείτε το δ και άρα τον χρόνο τ.
(β$_4$) Βρείτε αριθμητική τιμή για τη χρονική διαφορά πτώσης των δύο σφαιρών.
(β$_5$) Έστω το πιστόλι έχει μια πολύ μικρή κλίση και η $\vec{v}_0$ σχηματίζει πολύ μικρή γωνία $\theta = 0.1°$ με την οριζόντια. Βρείτε την χρονική διαφορά πτώσης των δύο σφαιρών.
Τελικά παίζει ρόλο η αντίσταση;
Θεωρήστε $g = 9.81$ m/s^2.
Δίνεται το ανάπτυγμα $(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ για $|\epsilon| \ll 1$.

---

3. Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = \lambda_1 r \sin\theta\,\hat{r} + \lambda_2 r\cos\theta\,\hat{\theta}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, με λ_1, λ_2 σταθερές.



(α) Ποιο το έργο της $\vec{F}$ για την κλειστή διαδρομή Ο→Α→Β→Ο του σχήματος; Οι διαδρομές ΟΑ και ΒΟ είναι ευθύγραμμες, ενώ η ΑΒ είναι τμήμα κύκλου ακτίνας R με κέντρο το Ο.
(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή του λόγου λ_1/λ_2 ίσως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική;
Για αυτή τη τιμή του λόγου λ_1/λ_2 είναι πράγματι συντηρητική;
Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(r,\theta,\phi)$;
Δίνεται η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες $\vec{\nabla}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$.

Λύσεις – Εργασία #2

1. (α) $\vec{r}_A = \vec{r}_A|_{t=0} + \vec{v}_A t$, δηλ. $x_A = Ut$, $x_B = L$.
Η δύναμη που ασκείται στο Β είναι η τάση του νήματος και έχει την διεύθυνση του νήματος και φορά προς το Α (γιατί το νήμα είναι τεντωμένο, αλλιώς δεν υπάρχει δύναμη). Έχει λοιπόν την φορά της διανυσματικής μονάδας από το Β προς το Α, δηλ. $\vec{F} = F\dfrac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$. Λόγω της $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = L$ (η απόσταση μεταξύ Α και Β είναι το μήκος του νήματος αφού το νήμα είναι μη εκτατό) προκύπτει η ζητούμενη $\vec{F} = F\dfrac{Ut - x}{L}\hat{x} + F\dfrac{L - y}{L}\hat{y}$.
(β) Ο νόμος Νεύτωνα για το σώμα Β είναι $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ και έχει συνιστώσες $\ddot{x} = \dfrac{F}{mL}(Ut - x)$ και $\ddot{y} = \dfrac{F}{mL}(L - y)$.
Η τρίτη εξίσωση που κλείνει το σύστημα είναι η απαίτηση η απόσταση μεταξύ Α και Β να είναι L, δηλ. $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = L \Leftrightarrow (Ut - x)^2 + (L - y)^2 = L^2$.
(γ) Θέτουμε $x = Ut + L\cos\phi$ και $y = L + L\sin\phi$ οπότε $\dot{x} = U - L\dot{\phi}\sin\phi$, $\dot{y} = L\dot{\phi}\cos\phi$, $\ddot{x} = -L\dot{\phi}^2\cos\phi - L\ddot{\phi}\sin\phi$ και $\ddot{y} = -L\dot{\phi}^2\sin\phi + L\ddot{\phi}\cos\phi$.
Με τις αντικαταστάσεις αυτές η σχέση $|\vec{r} - \vec{r}_A| = L$ ισχύει ταυτοτικά, ενώ οι συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα δίνουν $\dot{\phi}^2\cos\phi + \ddot{\phi}\sin\phi = \dfrac{F}{mL}\cos\phi$ και $\dot{\phi}^2\sin\phi - \ddot{\phi}\cos\phi = \dfrac{F}{mL}\sin\phi$.
Απαλείφοντας την F διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $\ddot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \phi = \omega t + \phi_0$, όπου ω και ϕ_0 σταθερές. Αντικαθιστώντας σε μία από τις δύο συνιστώσες προκύπτει $F = m\omega^2 L$.
Ουσιαστικά χρησιμοποιήσαμε πολικές στο σύστημα του Α, αφού θέσαμε $\vec{r} = \vec{r}_A + L(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})$, δηλ. $\vec{r} - \vec{r}_A = L\hat{\varpi}$ (η ακτίνα είναι σταθερή $\varpi = L$), $\vec{v} = \vec{v}_A + L\dot{\phi}(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$, δηλ. $\vec{v} - \vec{v}_A = L\dot{\phi}\hat{\phi}$ (δεν υπάρχει ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας γιατί $\varpi = L =$ σταθερά) και $\vec{a} = -L\dot{\phi}^2(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}) + L\ddot{\phi}(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$, δηλ. $\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$ (είναι $\vec{a}_A = 0$). Η δύναμη έχει μόνο ακτινική συνιστώσα $\vec{F} = -F\hat{\varpi}$ οπότε ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\ddot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \phi = \omega t + \phi_0$ και $F = mL\dot{\phi}^2 = m\omega^2 L$.
Επιστρέφοντας στις αρχικές συντεταγμένες βρήκαμε ότι $x = Ut + L\cos(\omega t + \phi_0)$, $y = L + L\sin(\omega t + \phi_0)$.
Οι αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$, $y|_{t=0} = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$, $\dot{y}|_{t=0} = 0$ (το σώμα Β βρίσκεται αρχικά ακίνητο στην αρχή των αξόνων) δίνουν $\cos\phi_0 = 0$, $\sin\phi_0 = -1$, $U - L\omega\sin\phi_0 = 0$ και $\cos\phi_0 = 0$, αντίστοιχα. Επομένως $\phi_0 = 3\pi/2$ και $\omega = -U/L$.
Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα αν σκεφτούμε την κίνηση στο σύστημα του Α. Από το σχήμα, αφού αρχικά το Α βρίσκεται στο σημείο $L\hat{y}$ και το Β στην αρχή των αξόνων, η προσανατολισμένη γωνία από τον άξονα x στο διάνυσμα ΑΒ είναι $3\pi/2$. Επίσης στο σύστημα του Α το σώμα Β έχει αρχικά σχετική ταχύτητα $\vec{v}_{\sigma\chi} = 0 - \vec{v}_A = -U\hat{x}$ (αφού στο αρχικό σύστημα είναι ακίνητο). Αυτή η ταχύτητα είναι μόνο περιστροφική $\omega L\hat{\phi}$ (αφού $\varpi = L =$ σταθερό) και λόγω του ότι αρχικά $\hat{\phi} = \hat{x}$ προκύπτει $\omega = -U/L$.
Το αποτέλεσμα είναι κυκλοειδής καμπύλη $x = Ut - L\sin(Ut/L)$, $y = L - L\cos(Ut/L)$, ίδια με το 3ο πρόβλημα της 1ης εργασίας.
(δ) Αφού το νήμα είναι αβαρές ασκεί στο Α δύναμη $-\vec{F}$ (έτσι η συνισταμένη δυνάμεων στο νήμα θα είναι μηδενική). Επομένως ο εξωτερικός παράγοντας ασκεί στο Α δύναμη $\vec{F}$ (ώστε η συνισταμένη δυνάμεων στο Α να είναι μηδενική και αυτό να εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση). Είναι $\vec{F} = F\dfrac{Ut - x}{L}\hat{x} + F\dfrac{L - y}{L}\hat{y} = F\left[\sin(Ut/L)\hat{x} + \cos(Ut/L)\hat{y}\right]$ με $F = m\omega^2 L = mU^2/L$.
Η ισχύς που δαπανά κάθε στιγμή ο εξωτερικός παράγοντας είναι $\vec{F}\cdot\vec{v}_A = \dfrac{mU^2}{L}\left[\sin(Ut/L)\hat{x} + \cos(Ut/L)\hat{y}\right]\cdot U\hat{x} = \dfrac{mU^3}{L}\sin(Ut/L)$.
Η ενέργεια των δύο μαζών είναι $E = \dfrac{mv_A^2}{2} + \dfrac{mv_B^2}{2} = \dfrac{mU^2}{2} + \dfrac{m}{2}\left\{[U - U\cos(Ut/L)]^2 + [U\sin(Ut/L)]^2\right\} = \dfrac{mU^2}{2} + mU^2\left[1 - \cos(Ut/L)\right]$ και ο ρυθμός μεταβολής της είναι $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{mU^3}{L}\sin(Ut/L)$, ίσος με την ισχύ

που προσφέρει (αλγεβρικά) ο εξωτερικός παράγοντας.
(ε) Αν σε μια επίπεδη κίνηση η επιτάχυνση είναι μόνο ακτινική, η στροφορμή (ως προς την αρχή του συστήματος) διατηρείται, δηλ. ισχύει $m\varpi^2\dot{\phi} =$ σταθερά. Αν επιπλέον η ακτίνα ϖ είναι σταθερή (δηλ. η κίνηση γίνεται σε κύκλο με κέντρο την αρχή του συστήματος), τότε η διατήρηση στροφορμής συνεπάγεται την σταθερότητα της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\phi}$, συνεπώς η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.

---

2. (α) $\ddot{\vec{r}}_{(0)} = \vec{g} \Leftrightarrow \dot{\vec{r}}_{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Leftrightarrow \vec{r}_{(0)} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$ θεωρώντας αρχή του συστήματος στο σημείο βολής. Η κατακόρυφη απόσταση γίνεται h όταν $h = g\tau_{(0)}^2/2 \Leftrightarrow \tau_{(0)} = \sqrt{2h/g}$. Προέκυψε ανεξάρτητος της v_0, άρα είναι ίδιος με τον χρόνο ελεύθερης πτώσης.
(β$_1$) Ο νόμος Νεύτωνα είναι τώρα $\ddot{\vec{r}} = \vec{g} - \lambda|\vec{v}|\vec{v}$, όπου $\vec{r} = \vec{r}_{(0)} + \lambda\vec{\xi} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2 + \lambda\vec{\xi}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t + \lambda\dot{\vec{\xi}}$, $\vec{a} = \vec{g} + \lambda\ddot{\vec{\xi}}$.
Αφού θέλουμε όρους μέχρι ανάλογους του λ, στον όρο αντίστασης θα θέσουμε $\vec{v} \approx \vec{v}_{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ και $|\vec{v}| \approx |\vec{v}_0 + \vec{g}t| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \approx v_0$ (αφού οι κατακόρυφες κινήσεις είναι πολύ μικρότερες των οριζόντιων).
Έτσι βρίσκουμε $\ddot{\vec{\xi}} = -v_0\,(\vec{v}_0 + \vec{g}\,t)$.
(β$_2$) Ολοκληρώνοντας και θέτοντας μηδενικές αρχικές τιμές για την διαταραχή (ώστε να ισχύουν οι αρχικές συνθήκες οι οποίες ήδη ικανοποιούνται με την λύση μηδενικής τάξης), έχουμε $\int_0^t \ddot{\vec{\xi}}\,dt = -v_0\int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}\,t)\,dt \Leftrightarrow \dot{\vec{\xi}} = -v_0\vec{v}_0 t - v_0\vec{g}\frac{t^2}{2}$ και $\int_0^t \dot{\vec{\xi}}\,dt = \int_0^t \left(-v_0\vec{v}_0 t - v_0\vec{g}\frac{t^2}{2}\right)dt \Leftrightarrow \vec{\xi} = -v_0\vec{v}_0\frac{t^2}{2} - v_0\vec{g}\frac{t^3}{6}$.
Άρα η θέση σε κάθε χρόνο είναι $\vec{r} = \vec{r}_{(0)} + \lambda\vec{\xi} = \vec{v}_0\left(t - \frac{\lambda v_0 t^2}{2}\right) + \vec{g}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\lambda v_0 t^3}{6}\right)$.
Η κατακόρυφη κίνηση δεν είναι τώρα ανεξάρτητη της οριζόντιας λόγω της δύναμης αντίστασης (η οποία στον νόμο Νεύτωνα είναι μη-γραμμικός όρος ως προς την ταχύτητα).
(β$_3$) Η σφαίρα φτάνει στο έδαφος τον χρόνο τ για τον οποίο $h = g\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\lambda v_0\tau^3}{6}\right)$.
Θέτοντας $\tau = \tau_{(0)}(1+\lambda\delta)$, οπότε $\tau^2 = \tau_{(0)}^2(1+\lambda\delta)^2 \approx \tau_{(0)}^2\,(1+2\lambda\delta)$ και $\lambda\tau^3 \approx \lambda\tau_{(0)}^3$, βρίσκουμε $\delta = \frac{v_0\tau_{(0)}}{6}$.
Τελικά $\tau = \tau_{(0)}\left(1 + \lambda\frac{v_0\tau_{(0)}}{6}\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{\lambda v_0 h}{3g}$.
(β$_4$) Είναι (όλα στο SI) $\lambda = 1.27\times10^{-3}$, $\tau_{(0)} = 0.43$, $\tau - \tau_{(0)} = \frac{\lambda v_0 h}{3g} = 0.010$, δηλ. 10 ms (10 χιλιοστά του δευτερολέπτου).
(β$_5$) Η μετατόπιση στην κατακόρυφη κατεύθυνση αγνοώντας την αντίσταση είναι $y_{(0)} = g\frac{t^2}{2} + v_0 t\sin\theta$.
Η ολοκλήρωση της $\ddot{\vec{\xi}} = -v_0\,(\vec{v}_0 + \vec{g}\,t)$ στην κατακόρυφη κατεύθυνση δίνει τώρα (όπου υπάρχει αρχική ταχύτητα $v_0\sin\theta$) $\int_0^t \ddot{\xi}_y dt = -v_0\int_0^t (v_0\sin\theta + g\,t)\,dt \Leftrightarrow \dot{\xi}_y = -v_0^2 t\sin\theta - v_0 g\frac{t^2}{2}$ και $\int_0^t \dot{\xi}_y dt = \int_0^t \left(-v_0^2 t\sin\theta - v_0 g\frac{t^2}{2}\right)dt \Leftrightarrow \xi_y = -v_0^2\frac{t^2}{2}\sin\theta - v_0 g\frac{t^3}{6}$. Επομένως η συνθήκη πτώσης είναι $h = g\frac{\tau^2}{2} + v_0\tau\sin\theta - \lambda\left(v_0^2\frac{\tau^2}{2}\sin\theta + v_0 g\frac{\tau^3}{6}\right)$. Θέτοντας $\tau = \tau_{(0)}(1+\lambda\delta)$ και κρατώντας μέχρι όρους ανάλογους του λ έχουμε τους μηδενικής τάξης όρους να δίνουν $h = g\frac{\tau_{(0)}^2}{2} + v_0\tau_{(0)}\sin\theta$, σχέση που δίνει τον χρόνο $\tau_{(0)} = \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}} - \frac{v_0\sin\theta}{g}$ και τους πρώτης τάξης όρους να δίνουν $0 = g\frac{\tau_{(0)}^2}{2}2\delta + v_0\tau_{(0)}\delta\sin\theta -$

$\left(v_0^2\frac{\tau_{(0)}^2}{2}\sin\theta + v_0 g\frac{\tau_{(0)}^3}{6}\right) \Leftrightarrow \delta = \frac{v_0\tau_{(0)}}{6}\frac{1+3v_0\sin\theta/g\tau_{(0)}}{1+v_0\sin\theta/g\tau_{(0)}}$.

Επομένως ο χρόνος πτώσης είναι $\tau = \tau_{(0)} + \lambda\frac{v_0\tau_{(0)}^2}{6}\frac{1+3v_0\sin\theta/g\tau_{(0)}}{1+v_0\sin\theta/g\tau_{(0)}}$, όπου $\tau_{(0)} = \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2\theta}{g^2}+\frac{2h}{g}} - \frac{v_0\sin\theta}{g}$.

Για $\sin\theta \approx \theta(\text{rad}) = 0.1\frac{\pi}{180}$ είναι $\tau_{(0)} = 0.389$ s, $\tau = 0.399$ s και $\tau - \sqrt{\frac{2h}{g}} = -0.033$ s. Αν η απόκλιση του όπλου είναι προς τα πάνω είναι $\sin\theta \approx \theta(\text{rad}) = -0.1\frac{\pi}{180}$, $\tau_{(0)} = 0.479$ s, $\tau = 0.489$ s και $\tau - \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.057$ s.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι η αντίσταση, θεωρώντας ότι η βολή είναι οριζόντια, δίνει διαφορά 10 ms. Η χρονική διαφορά που μέτρησαν οι MythBusters είναι περίπου τετραπλάσια και μάλλον οφείλεται σε σφάλματα (όπως η απόκλιση της αρχικής ταχύτητας από την οριζόντια που εξετάσαμε). Συστηματικότερη μελέτη θα χρειαζόταν (προσεκτικότερος σχεδιασμός του πειράματος και σίγουρα όχι μόνο μία εκτέλεση) για να συγκριθεί η παραπάνω θεωρητική μελέτη με τις μετρήσεις.

---

3. (α) Για την ΟΑ είναι $r = 0 \to R$, $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $d\vec{r} = dr\hat{r}$ και $\vec{F} = \lambda_1 r\hat{r}$, άρα $W_{\text{OA}} = \int_0^R \lambda_1 r\,dr = \lambda_1\frac{R^2}{2}$.
Για την ΑΒ είναι $r = R$, $\theta = \pi/2 \to \pi/4$, $\phi = 0$, $d\vec{r} = Rd\theta\hat{\theta}$ και $\vec{F} = \lambda_1 R\sin\theta\,\hat{r} + \lambda_2 R\cos\theta\,\hat{\theta}$, άρα $W_{\text{AB}} = \int_{\pi/2}^{\pi/4}\lambda_2 R\cos\theta\,Rd\theta = \lambda_2 R^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$.
Για την ΒΟ είναι $r = R \to 0$, $\theta = \pi/4$, $\phi = 0$, $d\vec{r} = dr\hat{r}$ και $\vec{F} = \frac{\lambda_1 r}{\sqrt{2}}\hat{r} + \frac{\lambda_2 r}{\sqrt{2}}\hat{\theta}$, άρα $W_{\text{BO}} = \int_R^0 \frac{\lambda_1 r}{\sqrt{2}}\,dr = -\lambda_1\frac{R^2}{2\sqrt{2}}$.
Το συνολικό έργο είναι $W = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2}\right)R^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$.
(β) Αναγκαία (όχι ικανή) συνθήκη για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική είναι το έργο στην κλειστή διαδρομή Ο→Α→Β→Ο να είναι μηδέν, δηλ. να ισχύει $\lambda_1/\lambda_2 = 2$.
Αν ισχύει $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ το πεδίο είναι $\vec{F} = 2\lambda_2 r\sin\theta\,\hat{r} + \lambda_2 r\cos\theta\,\hat{\theta}$.
Το πεδίο είναι συντηρητικό αν υπάρχει συνάρτηση V τέτοια ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες οι συνιστώσες της σχέσης αυτής είναι $2\lambda_2 r\sin\theta = -\frac{\partial V}{\partial r}$, $\lambda_2 r\cos\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}$ και $0 = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}$.
Λόγω της τρίτης $V = V(r,\theta)$. Η πρώτη ολοκληρώνεται σε $V = -\lambda_2 r^2\sin\theta + C(\theta)$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη προκύπτει $\lambda_2 r^2\cos\theta = \lambda_2 r^2\cos\theta + C'(\theta)$, δηλ. $C =$ σταθερά. Επομένως το πεδίο είναι συντηρητικό αν ισχύει $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V = -\lambda_2 r^2\sin\theta +$ σταθερά.
Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό μέσω της $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$. Θα έπρεπε όμως ούτως ή άλλως να ακολουθήσουμε την προηγούμενη διαδικασία για να βρούμε την V, η ύπαρξη της οποίας ταυτόχρονα δείχνει ότι το πεδίο είναι συντηρητικό.
