Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 Ν. Βλαχάκης

1. (α) Η συχνότητα ταλαντώσεων μιας χορδής εξαρτάται από το μήκος της ℓ, τη δύναμη που ασκείται στα άκρα της F και τη μάζα ανά μήκος της μ. Μπορείτε να βρείτε με διαστατική ανάλυση την έκφρασή της;
(β) Οι συχνότητες f_1 και f_2 από δύο διαδοχικές νότες της μουσικής κλίμακας (π.χ. Ντο και Ντο δίεση) έχουν σταθερό λόγο $f_2/f_1 = 2^{1/12}$. Σε ποια θέση βρίσκεται το 1ο μεταλλικό τάστο στην ταστιέρα μιας κιθάρας με μήκος ανοιχτής χορδής (δηλαδή το μήκος της χορδής που ταλαντώνεται όταν δεν την πιέζουμε με το δάχτυλό μας σε κάποιο σημείο της) ίσο με $\ell_1 = 57$ cm;

---

2. Σώμα κινείται με τρόπο ώστε η θέση του να ικανοποιεί την εξίσωση $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, όπου $\vec{\omega}$ σταθερό διάνυσμα.
(α) Δείξτε μέσω του εσωτερικού γινομένου της εξίσωσης με το $\vec{r}$ ότι η κίνηση γίνεται πάνω σε σφαίρα.
(β) Δείξτε μέσω του εσωτερικού γινομένου της εξίσωσης με το $\vec{\omega}$ ότι η κίνηση γίνεται πάνω σε επίπεδο κάθετο στο $\vec{\omega}$.
(γ) Δείξτε ότι η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.
(δ) Έστω επιλέγουμε κατάλληλα το σύστημα αναφοράς ώστε $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.
(δ_1) Δείξτε ότι η εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες συνεπάγεται $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $y = -\dot{x}/\omega$, $\dot{z} = 0$ και άρα η γενική λύση είναι $x = D\cos(\omega t + \phi_0)$, $y = D\sin(\omega t + \phi_0)$, $z = z_0$ (όπου οι $D \geq 0$, $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ και z_0 είναι σταθερές ολοκλήρωσης που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες).
(δ_2) Δείξτε ότι σε κυλινδρικές συντεταγμένες η εξίσωση συνεπάγεται $\dot{\varpi} = 0$, $\dot{\phi} = \omega$, $\dot{z} = 0$ και άρα η γενική λύση είναι $\varpi = D$, $\phi = \omega t + \phi_0$, $z = z_0$.
(δ_3) Δείξτε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες η εξίσωση συνεπάγεται $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = \omega$ και άρα η γενική λύση είναι $r = R$, $\theta = \theta_0$, $\phi = \omega t + \phi_0$. Ποια η σχέση των νέων σταθερών R, θ_0 με τις παλιές D και z_0;
(δ_4) Αν $\omega = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες) και αρχικά (δηλ. για $t = 0$) το σώμα βρίσκεται στο σημείο $5\sqrt{3}\hat{x} - 5\hat{y} - 3\hat{z}$ καθορίστε πλήρως την θέση του σε κάθε χρόνο (σε όποιες συντεταγμένες προτιμάτε).

---

3. Δύο υλικά σημεία Α και Β έχουν θέση σε κάθε χρόνο $\vec{r}_A = Ut\hat{x} + L\hat{y}$ και $\vec{r}_B = [Ut - L\sin(Ut/L)]\,\hat{x} + [L - L\cos(Ut/L)]\,\hat{y}$, όπου U και L θετικές σταθερές.
(α) Δείξτε ότι αν μετράμε τα μήκη σε μονάδες L και τους χρόνους σε μονάδες L/U (δηλ. κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x = Lx'$, $y = Ly'$, $z = Lz'$, $t = (L/U)t'$ και κατόπιν διώξουμε τους τόνους, ή ισοδύναμα $x \to Lx$, $y \to Ly$, $z \to Lz$, $t \to (L/U)t$), τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις απλά θέτοντας $U = 1$ και $L = 1$.
Στα επόμενα μπορείτε να θέσετε $U = 1$ και $L = 1$, κάτι που απλοποιεί σημαντικά τις εκφράσεις, ενώ σύμφωνα με το ερώτημα (α) δεν βλάπτει την γενικότητα.
(β) Βρείτε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις των σημείων. Είναι περιοδικές συναρτήσεις; Υπάρχουν χρόνοι στους οποίους μηδενίζεται η ταχύτητα του Β; Όμοια για την επιτάχυνση του Β.
(γ) Σχεδιάστε τις τροχιές των σημείων στο επίπεδο Oxy.
(δ) Ποια η απόσταση μεταξύ των σημείων σε κάθε χρόνο;
(ε) Τι είδους τροχιά εκτελεί το Β ως προς το Α;
(στ) Θα μπορούσε το Α να είναι το κέντρο και το Β σημείο της περιφέρειας τροχού που κυλάει;
(ζ) Για την τροχιά του Β στο σύστημα Oxy, βρείτε σε κάθε χρόνο $0 < t < 2\pi L/U$ το εφαπτόμενο διάνυσμα, τις επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσες της επιτάχυνσης, την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς και το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας.
(η) Βρείτε το μήκος της τροχιάς που διανύει το σημείο Β στο χρονικό διάστημα $0 < t < 4\pi L/U$.
Ίσως φανούν χρήσιμες οι τριγωνομετρικές ταυτότητες $\sin\beta = 2\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)$, $\cos\beta = \cos^2(\beta/2) - \sin^2(\beta/2) = 1 - 2\sin^2(\beta/2)$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Λύσεις – Εργασία #1

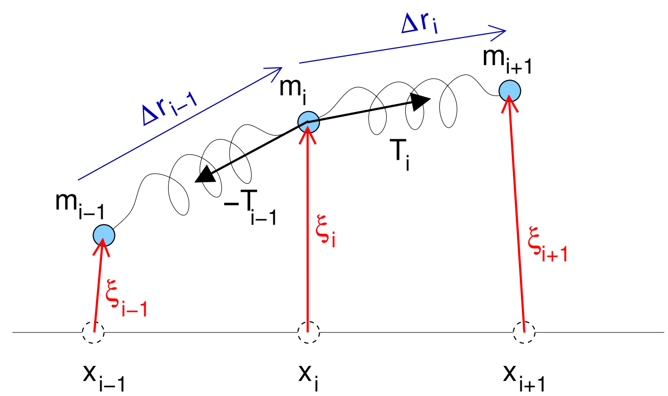
1. (α) Οι μονάδες της συχνότητας είναι $[T]^{-1}$, του μήκους $[L]$, της δύναμης $[M][L][T]^{-2}$ και της μάζας ανά μήκος $[M][L]^{-1}$. Άρα η σχέση $f \propto \ell^\alpha F^\beta \mu^\gamma$ δίνει $[T]^{-1} = [L]^\alpha \left([M][L][T]^{-2}\right)^\beta \left([M][L]^{-1}\right)^\gamma \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta - \gamma \text{ (από μήκη)}, \\ 0 = \beta + \gamma \text{ (από μάζες)}, \\ -1 = -2\beta \text{ (από χρόνους)}, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1, \\ \beta = 1/2, \\ \gamma = -1/2, \end{array} \right. \quad \text{δηλ. } f \propto \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης σε μια τεντωμένη χορδή βρίσκεται να είναι $c = \sqrt{F/\mu}$ (η απόδειξη παρακάτω). Η θεμελιώδης συχνότητα στάσιμων κυμάτων σε μια πακτωμένη χορδή μήκους ℓ αντιστοιχεί σε μήκος κύματος λ με $\ell = \lambda/2$. Σε συνδυασμό με τις σχέσεις $c = \lambda f$ και $c = \sqrt{F/\mu}$ βρίσκουμε την ακριβή σχέση για την θεμελιώδη συχνότητα $f = \dfrac{1}{2\ell}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ (οι ανώτερες αρμονικές είναι πολλαπλάσιά της $f = \dfrac{n}{2\ell}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ και αντιστοιχούν στην σχέση μήκους χορδής με μήκος κύματος $\ell = n\dfrac{\lambda}{2}$).

Απόδειξη της $c = \sqrt{F/\mu}$: Μια ελαστική χορδή μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μεγάλο αριθμό ίσων μαζών m, ενώ οι ελαστικές δυνάμεις μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν ελατήρια φυσικού μήκους Δs και σταθεράς $k = \dfrac{\kappa}{\Delta s}$ που συνδέουν γειτονικές μάζες. Όταν η χορδή είναι χαλαρή, δηλ. δεν υπάρχει τάση, κάθε μάζα m_i απέχει από τις διπλανές της m_{i+1}, m_{i-1} απόσταση Δs.

Όταν η χορδή είναι τεντωμένη με δύναμη F και ευθύγραμμη όπως όταν είναι ακίνητη σε μια κιθάρα, τα ελατήρια είναι τεντωμένα και έχουν μήκος Δx ώστε να ισχύει $F = k(\Delta x - \Delta s) = \kappa\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta s} - 1\right)$. Κάθε μάζα m_i βρίσκεται στην θέση $x_i = i\Delta x$ του άξονα x.



Έστω τώρα ότι διαταράσσεται η τεντωμένη χορδή, οπότε κάθε μάζα που βρισκόταν στην θέση x_i έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + \vec{\xi}_i(t)$. Κάθε μάζα m_i δέχεται δύο δυνάμεις ελατηρίου. Η πρώτη οφείλεται στο ελατήριο που ενώνει την μάζα αυτή με την επόμενη m_{i+1} και είναι $\vec{T}_i = k\left(|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i| - \Delta s\right)\dfrac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|} = \kappa\left(\left|\dfrac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta s}\right| - 1\right)\dfrac{\Delta\vec{r}_i}{|\Delta\vec{r}_i|}$, όπου $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$. Η δεύτερη οφείλεται στο ελατήριο που ενώνει την μάζα m_i με την προηγούμενη m_{i-1} και είναι $-k\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}| - \Delta s\right)\dfrac{\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|} = -\kappa\left(\left|\dfrac{\Delta\vec{r}_{i-1}}{\Delta s}\right| - 1\right)\dfrac{\Delta\vec{r}_{i-1}}{|\Delta\vec{r}_{i-1}|} = -\vec{T}_{i-1}$.

Ο νόμος Νεύτωνα για την m_i είναι $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{T}_i - \vec{T}_{i-1}$. Χρησιμοποιώντας την γραμμική πυκνότητα $\mu = \dfrac{m}{\Delta x}$, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\varepsilon}_i = \Delta\vec{r}_i/|\Delta\vec{r}_i|$ από το m_i στο m_{i+1}, ότι $\Delta\vec{r}_i = \Delta(x_i\hat{x} + \vec{\xi}_i) = \Delta x\,\hat{x} + \Delta\vec{\xi}_i$ και ότι $\dfrac{\Delta x}{\Delta s} = 1 + \dfrac{F}{\kappa}$, ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $\mu\ddot{\vec{\xi}}_i = \dfrac{\Delta}{\Delta x}\left\{\kappa\left[\left|\hat{x} + \dfrac{\Delta\vec{\xi}_i}{\Delta x}\right|\left(1 + \dfrac{F}{\kappa}\right) - 1\right]\hat{\varepsilon}_i\right\}$.

Η σχέση αυτή μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση συνεχούς κατανομής μάζας στην χορδή και δίνει την χρονική εξέλιξη της μετατόπισης του τμήματος που βρισκόταν στην θέση $x\,\hat{x}$ όταν η χορδή ήταν ακίνητη και τώρα έχει θέση $\vec{r} = x\,\hat{x} + \vec{\xi}(x,t)$, μέσω της διαφορικής εξίσωσης $\mu\ddot{\vec{\xi}} = \dfrac{\partial\,(T\hat{\varepsilon})}{\partial x}$ όπου $T = \left|\hat{x} + \dfrac{\partial\vec{\xi}}{\partial x}\right|(\kappa + F) - \kappa$ και $\hat{\varepsilon}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο στην χορδή, δηλ. $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}\Big/\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right| = \left(\hat{x} + \dfrac{\partial\vec{\xi}}{\partial x}\right)\Big/\left|\hat{x} + \dfrac{\partial\vec{\xi}}{\partial x}\right|$.

Για μικρές διαταραχές $\vec{\xi} = \xi_x \hat{x} + \vec{\xi}_\perp$, αναπτύσσοντας κατά Taylor και κρατώντας μέχρι γραμμικούς όρους ως προς τις παραγώγους του $\vec{\xi}$, είναι $T \approx F + (\kappa + F)\dfrac{\partial \xi_x}{\partial x}$, το μοναδιαίο εφαπτόμενο στην χορδή είναι $\hat{\varepsilon} \approx \hat{x} + \dfrac{\partial \vec{\xi}_\perp}{\partial x}$ και η παράγωγός του $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial x^2}$, οπότε ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\dfrac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = \dfrac{\kappa + F}{\mu}\dfrac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}$ στον άξονα x και $\dfrac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial t^2} = \dfrac{F}{\mu}\dfrac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial x^2}$ κάθετα. Για «σκληρά» ελατήρια (δηλ. μεγάλο κ) πρέπει να είναι $\dfrac{\partial \xi_x}{\partial x} \approx 0$ ώστε να είναι πεπερασμένη η τάση T, δηλ. είναι $\xi_x =$ σταθερό $= 0$ από οριακές συνθήκες στα άκρα της χορδής. Επομένως προκύπτουν εγκάρσιες μόνο κινήσεις (κάθετα στον άξονα x). Στον $\hat{y}$ άξονα (και όμοια στον z) προέκυψε κυματική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2}$ με ταχύτητα κυμάτων $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, η οποία έχει γενική λύση $\xi_y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Για την περίπτωση της πακτωμένης χορδής στα σημεία $x = 0$ και $x = \ell$ όπου τα κύματα είναι στάσιμα είναι προτιμότερο να αναπτύξουμε την λύση κατά Fourier σε ημίτονα $\sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$ που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες $\xi_y(x = 0) = 0$ και $\xi_y(x = \ell) = 0$ (ισοδύναμα να ψάξουμε λύση με μέθοδο χωρισμού μεταβλητών $\xi_y = G(t)X(x)$ και να απαιτήσουμε $X(0) = X(\ell) = 0$). Είναι δηλ. $\xi_y = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$ με την αντικατάσταση στην κυματική εξίσωση να δίνει $G_n(t) = D_n \sin\left(\dfrac{n\pi c t}{\ell} + \phi_n\right)$. Κάθε όρος του αθροίσματος αντιστοιχεί σε μήκος κύματος $\lambda = \dfrac{2\ell}{n}$ και συχνότητα $f = \dfrac{nc}{2\ell} = \dfrac{c}{\lambda}$ (πρόκειται για στάσιμο κύμα, δηλ. την επαλληλία δύο κυμάτων που κινούνται αντίθετα αφού $2\sin\left(\dfrac{n\pi c t}{\ell} + \phi_n\right) \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right) = \cos\left[\dfrac{n\pi(x - ct)}{\ell} - \phi_n\right] - \cos\left[\dfrac{n\pi(x + ct)}{\ell} + \phi_n\right]$).

(β) Για κάθε χορδή τα μ και F είναι δεδομένα (η τάση F ρυθμίζεται με το κούρδισμα). Επομένως $\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$. Αν η ανοικτή χορδή έχει μήκος $\ell_1 = 57$ cm και παράγει συχνότητα f_1, η αμέσως επόμενη νότα $f_2 = 2^{1/12} f_1$ παράγεται από μήκος $\ell_2 = \ell_1 f_1 / f_2 = \ell_1 / 2^{1/12}$. Το πρώτο τάστο βρίσκεται σε απόσταση $\ell_1 - \ell_2 = \ell_1(1 - 1/2^{1/12}) = 3.2$ cm από το σημείο που στηρίζεται η ανοικτή χορδή.
Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε π.χ. το άρθρο `https://arxiv.org/abs/0906.0127`.

---

2. (α) $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$, άρα $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}^2/2) = 0 \Leftrightarrow |\vec{r}| = R =$ σταθερό, εξίσωση σφαίρας ακτίνας R με κέντρο την αρχή του συστήματος.

(β) $\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$, άρα $\dfrac{d}{dt}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{r} = C =$ σταθερό, εξίσωση επιπέδου κάθετου στο διάνυσμα $\vec{\omega}$.
Γενικά μια σχέση γραμμική ως προς τις συντεταγμένες $ax + by + cz = d$ περιγράφει επίπεδο. Εδώ $a = \omega_x$, $b = \omega_y$, $c = \omega_z$, $d = C$. Ένας τρόπος να δείξουμε ότι το επίπεδο είναι κάθετο στο $\vec{\omega}$ είναι να σκεφτούμε ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = C$ είναι $\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$, οπότε $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \perp \vec{\omega}$. Η σταθερά C σχετίζεται με την απόσταση του επιπέδου από την αρχή του συστήματος, η οποία αντιστοιχεί στο σημείο του επιπέδου με $\vec{r} \parallel \vec{\omega}$, το $\vec{r} = \dfrac{C\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2}$. (Το επίπεδο θα μπορούσε να οριστεί σαν το κάθετο στο $\vec{\omega}$ που περνά από το σημείο $\vec{r} = \dfrac{C\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2}$.)

(γ) Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι κύκλος, άρα η κίνηση είναι κυκλική. Για να είναι ομαλή κυκλική πρέπει η ταχύτητα να έχει σταθερό μέτρο. Πρέπει λοιπόν $\dfrac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ η οποία ισχύει γιατί

παραγωγίζοντας την δοσμένη σχέση $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ παίρνουμε $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.
Αλλιώς: Από την δοσμένη σχέση $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ είναι $|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ $\vec{\omega}$ και $\vec{r}$. Το $|\vec{r}|$ είναι σταθερό από το (α), ενώ και η γωνία θ είναι σταθερή γιατί από το (β) είναι $|\vec{\omega}||\vec{r}|\cos\theta = C =$ σταθερά.

(δ$_1$) Η σχέση γράφεται $\dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\omega y\,, \\ \dot{y} = \omega x\,, \\ \dot{z} = 0\,. \end{cases}$ Η τρίτη είναι μια από τις ζητούμενες.
Λύνοντας την πρώτη ως προς y παίρνουμε μια από τις ζητούμενες $y = -\dot{x}/\omega$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε εξίσωση μόνο με x, την ζητούμενη $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.
Η τελευταία είναι γραμμική-ομογενής (εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή) και η γενική της λύση είναι επαλληλία $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, ή ισοδύναμα $x = D\cos(\omega t + \phi_0)$ με $D \geq 0$, $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ σταθερές ολοκλήρωσης.
Η λύση μπορεί να βρεθεί δοκιμάζοντας $e^{\lambda t}$, οπότε η αντικατάσταση στην διαφορική δίνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ με λύσεις $\lambda = \pm i\omega$. Η γενική λύση είναι η επαλληλία $x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ με $C_2 = C_1^\star$ ώστε η x να είναι πραγματική συνάρτηση (σαν άθροισμα συζυγών μιγαδικών). Θέτοντας $C_1 = \frac{1}{2} D e^{i\phi_0}$ με $D \geq 0$ και $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ πραγματικές σταθερές, οπότε $C_2 = C_1^\star = \frac{1}{2} D e^{-i\phi_0}$, βρίσκουμε $x = D\cos(\omega t + \phi_0)$.
Η σχέση $y = -\dot{x}/\omega$, αντικαθιστώντας την λύση που βρέθηκε για την x, δίνει $y = D\sin(\omega t + \phi_0)$. Η εξίσωση $\dot{z} = 0$ ολοκληρώνεται τετριμμένα σε $z = z_0 =$ σταθερά.

(δ$_2$) Η σχέση γράφεται $\dot{\varpi}\,\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\,\hat{\phi} + \dot{z}\,\hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{\varpi} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \varpi & 0 & z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varpi} = 0\,, \\ \varpi\dot{\phi} = \omega\varpi\,, \\ \dot{z} = 0\,, \end{cases}$ δίνει δηλ. τις ζητούμενες με μόνη υποσημείωση ότι η δεύτερη δίνει και την τετριμμένη λύση $\varpi = 0$, δηλ. ακινησία σε σημείο του άξονα z.
Οι ολοκληρώσεις είναι τετριμμένες $\dot{\varpi} = 0 \Leftrightarrow \varpi = D =$ σταθερά (ίδια σταθερά με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος, λόγω της $\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$), $\dot{\phi} = \omega \Leftrightarrow \phi = \omega t + \phi_0$ (ίδια σταθερά με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος, λόγω των $x = \varpi\cos\phi$, $y = \varpi\sin\phi$), $\dot{z} = 0 \Leftrightarrow z = z_0 =$ σταθερά.
(δ$_3$) Η σχέση γράφεται $\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\phi} = \omega\hat{z} \times r\hat{r} = \omega r\sin\theta\hat{\phi}$ από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου (η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων $\hat{z}$ και $\hat{r}$ είναι θ και με τον κανόνα των τριών δακτύλων το εξωτερικό γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\hat{z}$, $\hat{r}$ και έχει την φορά του $\hat{\phi}$).
Αλλιώς: Από σχέση πληρότητας $\hat{z} = (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{z}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta\hat{r} + \cos(\theta + \pi/2)\hat{\theta} + \cos(\pi/2)\hat{\phi} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$ οπότε $\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \omega\cos\theta & -\omega\sin\theta & 0 \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega r\sin\theta\hat{\phi}$.

Οι συνιστώσες της $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ είναι λοιπόν $\begin{cases} \dot{r} = 0\,, \\ r\dot{\theta} = 0\,, \\ r\sin\theta\dot{\phi} = \omega r\sin\theta\,, \end{cases}$ δηλ. οι ζητούμενες με μόνη υποσημείωση ότι η δεύτερη δίνει και $r = 0$, δηλ. ακινησία στο κέντρο και η τρίτη δίνει και την τετριμμένη λύση $r\sin\theta = 0$, δηλ. ακινησία σε σημείο του άξονα z. Οι ολοκληρώσεις είναι τετριμμένες $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = R =$ σταθερά, $\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0 =$ σταθερά, $\dot{\phi} = \omega \Leftrightarrow \phi = \omega t + \phi_0$.
Είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ επομένως $R = \sqrt{D^2 + z_0^2}$.
Το ίδιο από $r = |\varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}| = \sqrt{\varpi^2 + z^2}$.
Η γωνία θ καθορίζεται μονοσήμαντα από το $\cos\theta = \dfrac{z}{r}$ γιατί βρίσκεται στο διάστημα $\theta \in [0, \pi]$ όπου ορίζεται η συνάρτηση arccos, άρα $\theta_0 = \arccos\dfrac{z_0}{\sqrt{D^2 + z_0^2}}$.
Οι αντίστροφες σχέσεις είναι $z_0 = R\cos\theta_0$ και $D = R\sin\theta_0$ (από $\varpi = r\sin\theta$ ή $\sqrt{x^2 + y^2} = r\sin\theta$).
(δ$_4$) Σε καρτεσιανές: Οι $x|_{t=0} = 5\sqrt{3}$, $y|_{t=0} = -5$, $z|_{t=0} = -3$ δίνουν $D\cos\phi_0 = 5\sqrt{3}$, $D\sin\phi_0 = -5$, $z_0 = -3$. Οι δύο πρώτες, αφού τις υψώσουμε στο τετράγωνο και τις αθροίσουμε, δίνουν $D = 10$. Επίσης

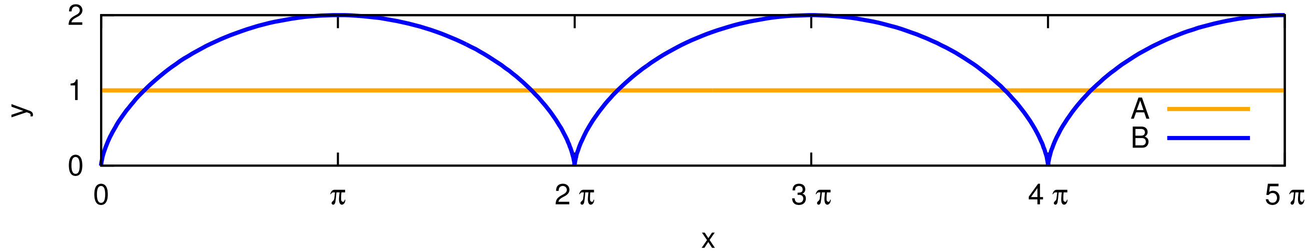
δίνουν ότι $\cos\phi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin\phi_0 = -\frac{1}{2}$, άρα $\phi_0 \in (3\pi/2, 2\pi)$. Η γωνία $2\pi - \phi_0$ είναι οξεία και έχει $\cos(2\pi-\phi_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin(2\pi-\phi_0) = \frac{1}{2}$, άρα $2\pi - \phi_0 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \phi_0 = \frac{11\pi}{6}$.
Η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x = 10\cos(t-\pi/6) = 5\sqrt{3}\cos t + 5\sin t$, $y = 10\sin(t-\pi/6) = 5\sqrt{3}\sin t - 5\cos t$, $z = -3$.
Δεν θα ήταν λάθος να θεωρούσαμε $\phi_0 = -\pi/6$, αρκεί να αλλάζαμε την υπόθεση ότι η σταθερά ολοκλήρωσης ϕ_0 ανήκει στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και να θεωρούσαμε ότι ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Γενικά υπάρχει ελευθερία στο να επιλέγουμε την γωνία σε οποιοδήποτε διάστημα με εύρος 2π.

Σε κυλινδρικές: Αρχικά είναι $\varpi|_{t=0} = \sqrt{x|^2_{t=0} + y|^2_{t=0}} = 10$ και $z|_{t=0} = -3$, άρα $D = 10$ και $z_0 = -3$. Για την γωνία $\phi|_{t=0} = \phi_0$ ισχύουν $\cos\phi = \frac{x}{\varpi}$ και $\sin\phi = \frac{y}{\varpi}$, δηλ. $\cos\phi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin\phi_0 = -\frac{1}{2}$, οπότε όμοια με πριν βρίσκουμε $\phi_0 = \frac{11\pi}{6}$. Σε κάθε χρόνο $\varpi = 10$, $\phi = t + 11\pi/6$, $z = -3$.

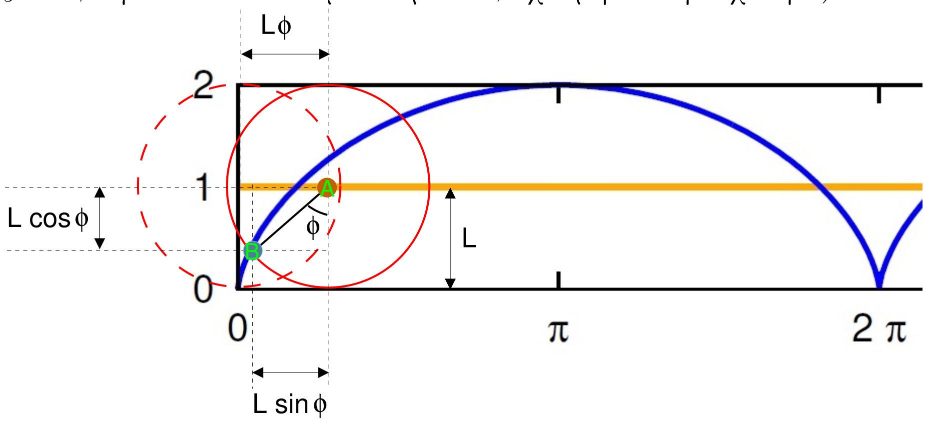
Σε σφαιρικές: Αρχικά είναι $r|_{t=0} = \sqrt{x|^2_{t=0} + y|^2_{t=0} + z|^2_{t=0}} = \sqrt{109}$, $\theta|_{t=0} = \arccos\frac{z|_{t=0}}{r|_{t=0}} = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{109}}\right)$ (αμβλεία γωνία), άρα σε κάθε χρόνο $r = R = \sqrt{109}$ και $\theta = \theta_0 = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{109}}\right)$. Για την γωνία $\phi|_{t=0} = \phi_0$ ισχύουν $\cos\phi = \frac{x}{r\sin\theta}$ και $\sin\phi = \frac{y}{r\sin\theta}$. Είναι $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{10}{\sqrt{109}}$ δηλ. $\cos\phi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin\phi_0 = -\frac{1}{2}$, οπότε όμοια με πριν βρίσκουμε $\phi_0 = \frac{11\pi}{6}$. Σε κάθε χρόνο $\phi = t + 11\pi/6$.

---

3. (α) Ορίζοντας $x = Lx'$, $y = Ly'$, $z = Lz'$, $t = (L/U)t'$ οι σχέσεις γράφονται $L\vec{r}'_A = U(L/U)t'\hat{x} + L\hat{y} \Leftrightarrow \vec{r}'_A = t'\hat{x} + \hat{y}$ και $L\vec{r}'_B = [U(L/U)t' - L\sin(t')]\,\hat{x} + [L - L\cos(t')]\,\hat{y} \Leftrightarrow \vec{r}'_B = [t' - \sin(t')]\,\hat{x} + [1-\cos(t')]\,\hat{y}$.
Διώχνοντας τους τόνους παίρνουμε τις αρχικές εξισώσεις με $U = L = 1$.
Στα επόμενα θα θεωρήσω $\vec{r}_A = t\hat{x} + \hat{y}$ και $\vec{r}_B = (t - \sin t)\,\hat{x} + (1-\cos t)\,\hat{y}$.
(β) $\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A = \hat{x}$, $\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = 0$, $\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = (1-\cos t)\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$, $\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y}$.
Οι $\vec{v}_A$ και $\vec{a}_A$ είναι σταθερές (τετριμμένη περίπτωση περιοδικών συναρτήσεων αφού ισχύει $\vec{v}_A(t+T) = \vec{v}_A(t)$ για κάθε T και όμοια για την $\vec{a}_A$).
Η σχέση $\vec{v}_B(t+T) = \vec{v}_B(t)$ δίνει $\cos(t+T) = \cos t$ και $\sin(t+T) = \sin t$ για κάθε t. Η μικρότερη θετική τιμή της T που τις ικανοποιεί είναι προφανώς η $T = 2\pi$. Όμοια για την $\vec{a}_B$. Επομένως οι $\vec{v}_B$ και $\vec{a}_B$ είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π.
Η ταχύτητα του Β μηδενίζεται όταν και οι δύο της συνιστώσες μηδενίζονται, δηλ. όταν $\cos t = 1$ και $\sin t = 0$. Και τα δύο συμβαίνουν για $t = 2n\pi$ με ακέραιο n.
Η επιτάχυνση του Β μηδενίζεται όταν και οι δύο της συνιστώσες μηδενίζονται, δηλ. όταν $\sin t = 0$ και $\cos t = 0$. Αυτές δεν συναληθεύουν ποτέ, αφού οι λύσεις της πρώτης είναι $t = n\pi$ και της δεύτερης $t = 2n'\pi \pm \pi/2$, με ακέραια n, n'.
Το ότι δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα τα $\sin t$, $\cos t$ προκύπτει και από την ταυτότητα $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
(γ)



(δ) $|\vec{r}_B - \vec{r}_A| = |-\sin t\,\hat{x} - \cos t\,\hat{y}| = 1$, σταθερή σε κάθε χρόνο.
(ε) $\vec{r}_B - \vec{r}_A = -\sin t\,\hat{x} - \cos t\,\hat{y}$, οπότε το Β εκτελεί κυκλική τροχιά στο σύστημα του Α.
(στ) Το Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_A = \hat{x}$. Το Β ως προς το Α εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση $\vec{r}_B - \vec{r}_A = -\sin t\,\hat{x} - \cos t\,\hat{y}$, δηλ. με ακτίνα $L = 1$ και γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 1$.
Η φορά διαγραφής είναι δεξιόστροφη, κάτι που αντιστοιχεί σε $\vec{\omega} = -\hat{z}$ και ισχύει $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$.
Ισχύει η συνθήκη κύλισης $|\vec{v}_A| = \omega L$, άρα πράγματι θα μπορούσε το Α να είναι το κέντρο και το Β σημείο της περιφέρειας ενός τροχού που κυλάει πάνω στο επίπεδο $y = 0$ (τις στιγμές που το σημείο Β βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $y = 0$, δηλ. τις $t = 2n\pi$ με ακέραιο n, έχει μηδενική ταχύτητα).



Όπως φαίνεται στο σχήμα, για την τροχιά του Β που λέγεται κυκλοειδής ισχύει $x_B = L\phi - L\sin\phi$ και $y_B = L - L\cos\phi$, όπου ϕ είναι η γωνία που έχει στραφεί ο τροχός (το μήκος τόξου από το σημείο του τροχού που ακουμπά στο επίπεδο μέχρι το Β είναι ίσο με την οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει ο τροχός, κάτι που αποτελεί την συνθήκη κύλισης, ανεξαρτήτως του ποια είναι η σχέση της ϕ με τον χρόνο).
(ζ) Για το Β έχει βρεθεί ότι $\vec{v}_B = (1 - \cos t)\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$ και $\vec{a}_B = \sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y}$.
Η ταχύτητα γράφεται και σαν $\vec{v}_B = 2\sin^2(t/2)\hat{x} + 2\sin(t/2)\cos(t/2)\hat{y} = 2\sin(t/2)\,[\sin(t/2)\hat{x} + \cos(t/2)\hat{y}]$, άρα έχει μέτρο $|\vec{v}| = |2\sin(t/2)| = 2\sin(t/2)$ στο διάστημα $0 < t < 2\pi$, ενώ το εφαπτόμενο μοναδιαίο είναι $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \sin(t/2)\hat{x} + \cos(t/2)\hat{y}$.
Η επιτάχυνση έχει επιτρόχια συνιστώσα $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = [\cos t\cos(t/2) + \sin t\sin(t/2)]\,\hat{\varepsilon} = \cos(t/2)\hat{\varepsilon}$ και κεντρομόλο $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = \sin(t/2)\cos(t/2)\hat{x} - \sin^2(t/2)\hat{y} = \sin(t/2)\,[\cos(t/2)\hat{x} - \sin(t/2)\hat{y}]$. Άρα το μέτρο της είναι $|\vec{a}_\kappa| = |\sin(t/2)| = \sin(t/2)$ στο διάστημα $0 < t < 2\pi$, το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας είναι $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|} = \cos(t/2)\hat{x} - \sin(t/2)\hat{y}$ και η ακτίνα καμπυλότητας είναι $\mathcal{R} = \dfrac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_\kappa|} = 4\sin(t/2)$.
(η) Το μήκος της τροχιάς είναι $s = \int_0^t |\vec{v}|\,dt = 2\int_0^t |\sin(t/2)|dt$. Για χρόνους $0 < t < 2\pi$ όπου $\sin(t/2) > 0$ η ολοκλήρωση δίνει $s = [-4\cos(t/2)]_0^t = 4\,[1 - \cos(t/2)] = 8\sin^2(t/4)$. Οπότε στο διάστημα $0 < t < 2\pi$ έχει διανυθεί μήκος ίσο με 8. Η ταχύτητα είναι περιοδική με περίοδο 2π, οπότε στο επόμενο διάστημα $2\pi < t < 4\pi$ διανύεται άλλο τόσο, άρα συνολικά $s = 16$.
Το ίδιο προκύπτει και με άμεση ολοκλήρωση $s = \int_0^{4\pi} |\vec{v}|\,dt = 2\int_0^{4\pi} |\sin(t/2)|dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(t/2)dt + 2\int_{2\pi}^{4\pi} [-\sin(t/2)]\,dt = [-4\cos(t/2)]_0^{2\pi} + [4\cos(t/2)]_{2\pi}^{4\pi} = 16$.