Μηχανική Ι – Εργασία #7

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 Ν. Βλαχάκης

---

1. (α) Ποια είναι η ένταση και το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί μια ομογενής σφαίρα πυκνότητας ρ και ακτίνας R σε όλο το χώρο;
Σχεδιάστε την $g(r)$ και μέσω αυτού του γραφήματος και μόνο σχεδιάστε την $\Phi(r)$ (χωρίς να χρησιμοποιήσετε την μαθηματική σχέση που βρήκατε για το δυναμικό).
(β) Αν εντός της σφαίρας υπάρχει μια σφαιρική οπή ακτίνας R' της οποίας το κέντρο βρίσκεται σε θέση $\vec{D}$ από το κέντρο της σφαίρας, βρείτε την ένταση του βαρυτικού πεδίου στο εσωτερικό της.
Υπόδειξη: Θεωρήστε την οπή σαν προσθήκη αρνητικής μάζας και χρησιμοποιήστε την αρχή της επαλληλίας.

---

2. Ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους $2L$ καταλαμβάνει τον χώρο $-L \leq x \leq L$ του άξονα x.
(α) Βρείτε την ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί στα σημεία του άξονα x με $x > L$.
(β) Μια δεύτερη ίδια ράβδος βρίσκεται στον χώρο $D - L \leq x \leq D + L$ του άξονα x, όπου $D > 2L$. Ποια η δύναμη μεταξύ τους;
Έχουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα αν $D \gg L$;

---

3. Σώμα μάζας M ακτίνας R κινείται στο βαρυτικό πεδίο σώματος M_0 που βρίσκεται σε απόσταση $r_0 \gg R$.
(α) Έστω σφαιρικές συντεταγμένες στο σύστημα αξόνων με αρχή το κέντρο του M και άξονα $\hat{z}$ προς το κέντρο του M_0. Δείξτε ότι το δυναμικό λόγω της βαρύτητας του M_0 κοντά στο M γράφεται

$$\Phi = -\frac{GM_0}{r_0}\left[1 + \frac{r}{r_0}\cos\theta + \frac{r^2}{r_0^2}\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{r^3}{r_0^3}\right)\right].$$

(β) Δείξτε ότι η ένταση είναι $\vec{g} \approx \vec{a}_0 + \vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$ όπου $\vec{a}_0 = \dfrac{GM_0}{r_0^2}\hat{z}$ και η ένταση του παλιρροϊκού πεδίου είναι

$$\vec{g}_{\pi\alpha\lambda} = \frac{2GM_0 r}{r_0^3}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\hat{r} - \frac{3}{2}\sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\theta}\right).$$

(γ) Σχεδιάστε σε διάφορα σημεία της επιφάνειας του M τις συνιστώσες του $\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$ πάνω και κάθετα στην επιφάνεια, καθώς και το ίδιο το $\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$.
(δ) Έστω το σώμα M είναι ένας πλανήτης πλήρως καλυμμένος από στρώμα νερού. Ο όγκος του νερού θα κινείται λόγω της παλιρροϊκής δύναμης και έστω ακαριαία ισορροπεί σε μια επιφάνεια που διαφέρει λίγο από την σφαιρική, $r = R(1+\zeta)$ με $|\zeta| \ll 1$. Αν η μετακίνηση αυτή δεν αλλάζει σημαντικά το βαρυτικό πεδίο του M αιτιολογήστε γιατί το σχήμα ισορροπίας θα είναι ισοδυναμική $-\dfrac{GM}{r} - \dfrac{GM_0 r^2}{r_0^3}\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{2} =$ σταθερά. Βρείτε διαταρακτικά την $\zeta(\theta)$, την σταθερά από την συνθήκη $\displaystyle\int_0^\pi \zeta\sin\theta\,d\theta = 0$ που προκύπτει απαιτώντας ο όγκος του νερού να είναι σταθερός και δείξτε ότι προκύπτει ελλειπτικό σχήμα $r = R + \dfrac{M_0 R^4}{M r_0^3}\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{2}$, ή ισοδύναμα $\left(\dfrac{z}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\varpi}{b}\right)^2 = 1$ με $a = R + \dfrac{M_0 R^4}{M r_0^3}$, $b = R - \dfrac{M_0 R^4}{2M r_0^3}$.
Δίνεται το ανάπτυγμα $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\epsilon\mu + \epsilon^2}} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\epsilon^\ell P_\ell(\mu)$ για $|\epsilon|, |\mu| < 1$, όπου $P_\ell(\mu) = \dfrac{1}{2^\ell \ell!}\dfrac{d^\ell}{d\mu^\ell}(\mu^2 - 1)^\ell$ τα πολυώνυμα Legendre $P_0(\mu) = 1$, $P_1(\mu) = \mu$, $P_2(\mu) = \dfrac{3\mu^2 - 1}{2}$, $\ldots$, οπότε $\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\mu)$, όπου $r_> = \max\{r, r'\}$, $r_< = \min\{r, r'\}$ και $\mu = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{rr'}$.

Λύσεις – Εργασία #7

1. (α) Λόγω συμμετρίας είναι $\vec{g} = g(r)\hat{r}$.
Από ολοκληρωτικό νόμο Gauss σε σφαίρα ακτίνας $r < R$ είναι $\oiint \vec{g}\cdot d\vec{a} = -4\pi G \iiint \rho\, d\tau \Leftrightarrow g\, 4\pi r^2 = -4\pi G\rho \dfrac{4\pi r^3}{3} \Leftrightarrow g = -\dfrac{4\pi G\rho r}{3}$.
Όμοια σε σφαίρα ακτίνας $r > R$ είναι $\oiint \vec{g}\cdot d\vec{a} = -4\pi G \iiint \rho\, d\tau \Leftrightarrow g\, 4\pi r^2 = -4\pi G\rho \dfrac{4\pi R^3}{3} \Leftrightarrow g = -\dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}$.

$$\text{Άρα } \vec{g} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi G\rho\vec{r}}{3} & \text{αν } r \le R\,, \\ -\dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}\hat{r} & \text{αν } r \ge R\,. \end{cases}$$

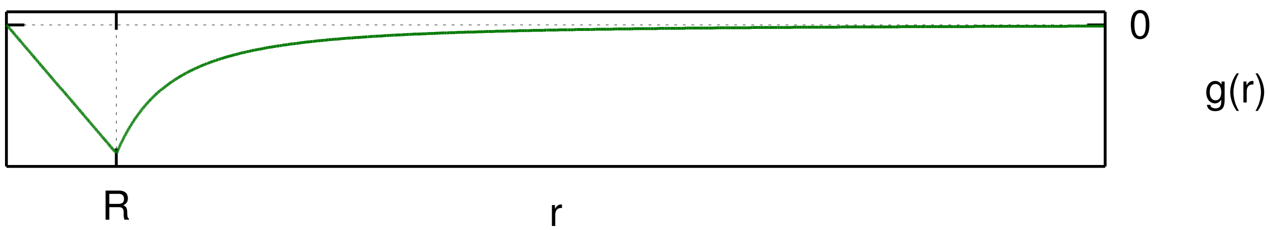
Τα ίδια προκύπτουν από την διαφορική μορφή του νόμου Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r})$, η οποία για $\vec{g} = g(r)\hat{r}$ γράφεται $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d(r^2 g)}{dr} = -4\pi G\rho(r)$. Για $r < R$ έχει λύση $r^2 g = -4\pi G\rho \int r^2\, dr = -\dfrac{4\pi G\rho r^3}{3} + C \Leftrightarrow g = -\dfrac{4\pi G\rho r}{3} + \dfrac{C}{r^2}$. Η σταθερά μηδενίζεται για να μην απειρίζεται η ένταση στο κέντρο, άρα $g = -\dfrac{4\pi G\rho r}{3}$. Για $r > R$ είναι $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d(r^2 g)}{dr} = 0 \Leftrightarrow g = \dfrac{D}{r^2}$ με την σταθερά D να καθορίζεται από την συνέχεια της g στην ακτίνα R (η οποία ισχύει γιατί δεν υπάρχει κάποια επιφανειακή μάζα). Άρα $D = -\dfrac{4\pi G\rho R^3}{3}$.
Το δυναμικό βρίσκεται από $\Phi = -\int \vec{g}\cdot d\vec{r} = -\int g\, dr$.
Για $r > R$ είναι $\Phi = \int \dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r^2} dr = -\dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r} + D'$. Η προσθετική σταθερά D' είναι αυθαίρετη. Αν θέλουμε το δυναμικό να μηδενίζεται στο άπειρο είναι $D' = 0$.
Όπως αναμέναμε το δυναμικό έξω από την σφαίρα είναι $\Phi = -\dfrac{GM}{r}$ όπου $M = \dfrac{4\pi R^3}{3}\rho$ η συνολική της μάζα.
Για $r < R$ είναι $\Phi = \int \dfrac{4\pi G\rho r}{3} dr = \dfrac{2\pi G\rho r^2}{3} + D$. Η απαίτηση το δυναμικό να είναι συνεχές στην ακτίνα $r = R$ δίνει την σταθερά $D = -2\pi G\rho R^2$.

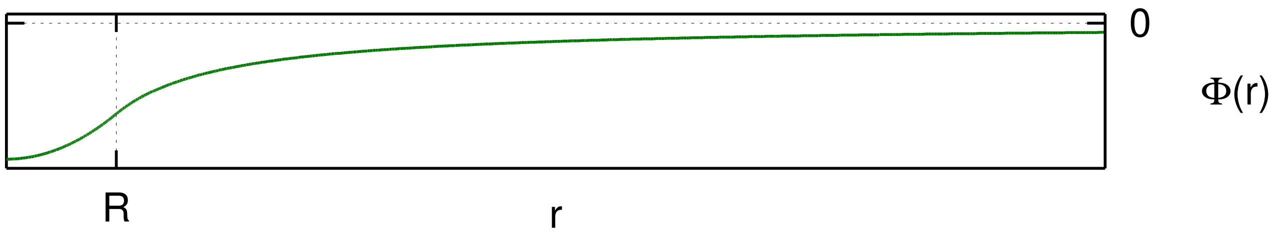
$$\text{Άρα } \Phi = \begin{cases} \dfrac{2\pi G\rho r^2}{3} - 2\pi G\rho R^2 & \text{αν } r \le R\,, \\ -\dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r} & \text{αν } r \ge R\,. \end{cases}$$

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\Phi = -\int_\infty^r g\, dr$ το οποίο συμπεριλαμβάνει την υπόθεση μηδενισμού του δυναμικού στο άπειρο.
Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να λύσουμε την εξίσωση Poisson $\vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\rho$, η οποία για $\Phi = \Phi(r)$ γίνεται $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho(r)$. Για $r < R$ η ολοκλήρωση δίνει $\Phi = \dfrac{2\pi G\rho r^2}{3} - \dfrac{C}{r} + D$. Η σταθερά C πρέπει να μηδενιστεί ώστε το δυναμικό να μην απειρίζεται στο κέντρο. Για $r > R$ όπου $\rho(r) = 0$ η ολοκλήρωση δίνει $\Phi = -\dfrac{C'}{r} + D'$. Η σταθερά D' πρέπει να μηδενιστεί αν θέλουμε το δυναμικό να μηδενίζεται στο άπειρο. Οι υπόλοιπες σταθερές D και C' βρίσκονται από την συνέχεια του δυναμικού και της παραγώγου του (δηλ. της έντασης) στην ακτίνα $r = R$.

Ένας άλλος τρόπος βασίζεται στο ότι ένα σφαιρικό κέλυφος μάζας dM και ακτίνας a δημιουργεί στο εξωτερικό του δυναμικό $-GdM/r$, ενώ στο εσωτερικό του το δυναμικό είναι σταθερό και ίσο με $-GdM/a$ λόγω συνέχειας στην ακτίνα $r = a$. Έτσι το δυναμικό της ομογενούς σφαίρας σε ακτίνα $r < R$ είναι άθροισμα των συνεισφορών από κελύφη με μικρότερη ακτίνα $\int_0^r \frac{-GdM}{r} = -\frac{GM_{\varepsilon\gamma\kappa}(r)}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2}{3}$ ($M_{\varepsilon\gamma\kappa}(r)$ είναι η έγκλειστη μάζα στην ακτίνα r) και συνεισφορών από κελύφη με μεγαλύτερη ακτίνα $a > r$, πάχους da και μάζας $dM = \rho 4\pi a^2 da$, δηλ. $\int_r^R \frac{-GdM}{a} = -\int_r^R G\rho 4\pi a da = 2\pi G\rho(r^2 - R^2)$. Όμοια για $r > R$ είναι $\Phi = -\frac{GM_{\varepsilon\gamma\kappa}(R)}{r} = -\frac{GM}{r}$.

Από $\Phi = -\int g\, dr \Leftrightarrow g = -\frac{d\Phi}{dr}$ κοιτώντας το διάγραμμα της g και ξεκινώντας από το άπειρο όπου το δυναμικό μηδενίζεται, σκεφτόμαστε ποια συνάρτηση έχει κλίση ίση με $-g$. (Ισοδύναμα το δυναμικό αντιστοιχεί στο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της $g(r)$.) Επίσης, τα κοίλα της Φ καθορίζονται από το πρόσημο της $-g'$, είναι προς τα κάτω αν η g είναι φθίνουσα και προς τα πάνω αν η g είναι αύξουσα. Το ακρότατο της g αντιστοιχεί σε σημείο καμπής. Τέλος, όταν μηδενίζεται η g το δυναμικό είναι ακρότατο.





(β) Ο νόμος Gauss είναι γραμμικός επομένως ισχύει η αρχή επαλληλίας, δηλ. αν μια κατανομή μάζας $\rho_1(\vec{r})$ δημιουργεί πεδίο $\vec{g}_1(\vec{r})$ και μια κατανομή $\rho_2(\vec{r})$ δημιουργεί πεδίο $\vec{g}_2(\vec{r})$ τότε η κατανομή $\rho_1(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r})$ δημιουργεί πεδίο $\vec{g}_1(\vec{r}) + \vec{g}_2(\vec{r})$.
Ας θεωρήσουμε την κατανομή της σφαίρας με την οπή σαν άθροισμα κατανομής με γεμάτη σφαίρα πυκνότητας ρ και μιας κατανομής μάζας με αρνητική πυκνότητα $-\rho$ στην θέση της οπής. Το πεδίο σε σημείο Σ στο εσωτερικό της μεγάλης σφαίρας είναι $\vec{g}_1 = -\frac{4\pi G\rho\vec{r}_1}{3}$ όπου $\vec{r}_1$ =ΟΣ το διάνυσμα θέσης του σημείου από το κέντρο Ο της μεγάλης σφαίρας. Όμοια το πεδίο σε σημείο Σ στο εσωτερικό της μικρής σφαίρας είναι $\vec{g}_2 = -\frac{4\pi G(-\rho)\vec{r}_2}{3}$ όπου $\vec{r}_2$ =Ο′Σ το διάνυσμα θέσης του σημείου από το κέντρο Ο′ της μικρής σφαίρας. Από την αρχή της επαλληλίας, στο εσωτερικό της οπής, το οποίο αντιστοιχεί στο εσωτερικό και της μεγάλης και της μικρής σφαίρας, το πεδίο είναι $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -\frac{4\pi G\rho}{3}$(ΟΣ-Ο′Σ)$= -\frac{4\pi G\rho}{3}$ΟΟ′, δηλ. το πεδίο είναι ομογενές, ίσο με $\vec{g} = -\frac{4\pi G\rho}{3}\vec{D}$, όπου $\vec{D}$ το διάνυσμα από το κέντρο της σφαίρας μέχρι το κέντρο της οπής.

---

2. (α) Η στοιχειώδης ένταση από μήκος dx' της ράβδου, που βρίσκεται στην θέση x' και έχει μάζα $Mdx'/2L$ είναι $d\vec{g} = -\frac{GMdx'/2L}{(x-x')^2}\hat{x}$, άρα $\vec{g} = -\int_{-L}^{+L} \frac{GMdx'/2L}{(x-x')^2}\hat{x} = -\left[\frac{GM/2L}{x-x'}\right]_{-L}^{+L}\hat{x} = -\frac{GM}{x^2-L^2}\hat{x}$.
(β) Η στοιχειώδης δύναμη από την πρώτη σε μήκος dx της δεύτερης που βρίσκεται στην θέση x και έχει μάζα $Mdx/2L$ είναι $d\vec{F}_2 = \vec{g}(x)Mdx/2L$, άρα $\vec{F}_2 = \int_{D-L}^{D+L} \vec{g}(x)Mdx/2L = -\hat{x}\frac{GM^2}{2L}\int_{D-L}^{D+L}\frac{dx}{x^2-L^2} =$

$$-\hat{x}\frac{GM^2}{4L^2}\int_{D-L}^{D+L}\left(\frac{1}{x-L}-\frac{1}{x+L}\right)dx=-\hat{x}\frac{GM^2}{4L^2}\left[\ln\left|\frac{x-L}{x+L}\right|\right]_{D-L}^{D+L}=-\hat{x}\frac{GM^2}{4L^2}\ln\frac{D^2}{D^2-4L^2}.$$

Για $D \gg L$ είναι $\vec{F}_2=\hat{x}\frac{GM^2}{4L^2}\ln\left(1-4L^2/D^2\right)\approx-\hat{x}\frac{GM^2}{D^2}$ διότι για μικρά ϵ είναι $\ln(1+\epsilon)\approx\epsilon$. Αυτό είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα που εκφράζει βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σημειακών μαζών.

---

3. (α) Το δυναμικό για το πεδίο βαρύτητας του M_0 σε σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ από το κέντρο της μάζας M είναι $\Phi=-\frac{GM_0}{|\vec{r}-r_0\hat{z}|}$. Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ανάπτυγμα για $r<r_0$, οπότε $r_<=r$ και $r_>=r_0$, είναι $\Phi=-GM_0\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{r_0^{\ell+1}}P_\ell(\mu)$, όπου $\mu=\frac{\vec{r}\cdot(r_0\hat{z})}{rr_0}=\cos\theta$. Δηλ. το δυναμικό σε σημείο $\vec{r}$ με σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,ϕ) είναι $\Phi=-GM_0\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{r_0^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta)$. Αντικαθιστώντας τα πρώτα πολυώνυμα Legendre καταλήγουμε στην ζητούμενη.

(β) Η σχέση $\vec{g}=-\vec{\nabla}\Phi$ δίνει $\vec{g}\approx\frac{GM_0}{r_0}\left[\frac{\vec{\nabla}(r\cos\theta)}{r_0}+\vec{\nabla}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)\right]$.

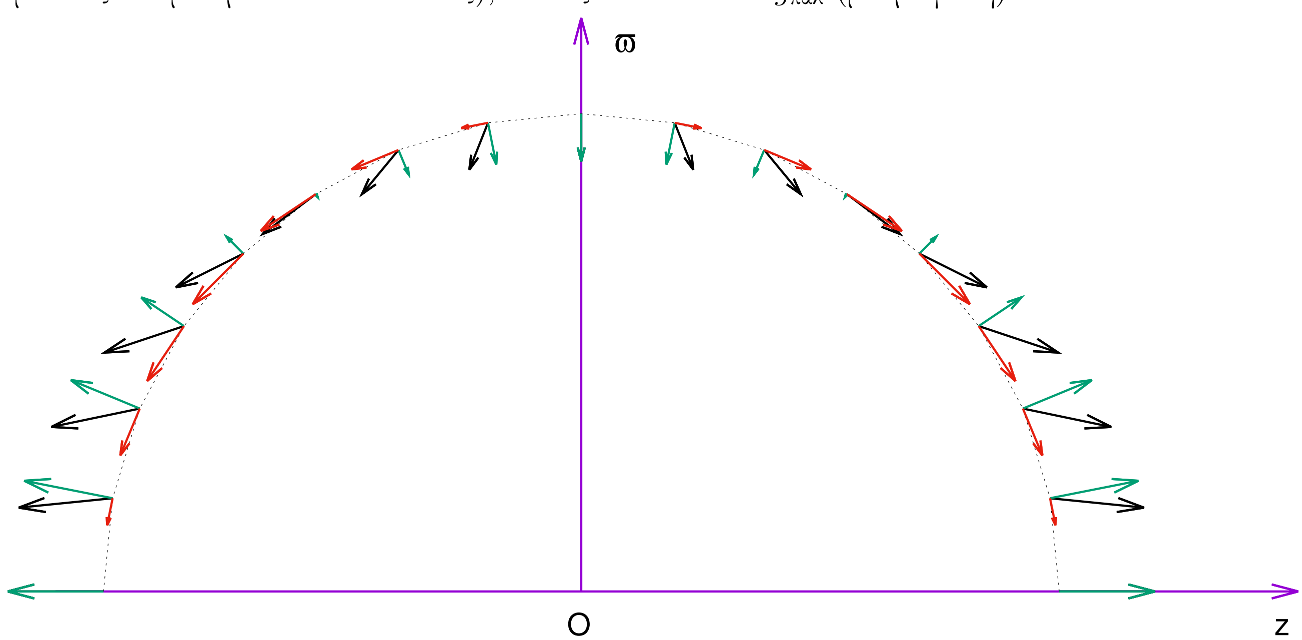
Ο πρώτος όρος ισούται με $\frac{GM_0}{r_0^2}\hat{z}$ διότι $r\cos\theta=z$ και $\vec{\nabla}z=\hat{z}$. Εκφράζει το πεδίο από το M_0 στο κέντρο του M και ισούται με την επιτάχυνση $\vec{a}_0$ που αποκτά το M λόγω του ότι βρίσκεται στο πεδίο του M_0.

Το ίδιο βρίσκεται από $\vec{\nabla}(r\cos\theta)=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\hat{\theta}=\cos\theta\,\hat{r}-\sin\theta\,\hat{\theta}=\hat{z}$.

Ο δεύτερος όρος εκφράζει τις μικρές αποκλίσεις από την βαρύτητα $\vec{a}_0$, δηλ. το παλιρροϊκό πεδίο $\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$. Είναι $\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}=\frac{GM_0}{r_0}\vec{\nabla}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)$. Εκφράζοντας την κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}=\frac{GM_0}{r_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}\right)\left(\frac{r^2}{r_0^2}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)=\frac{2GM_0r}{r_0^3}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\hat{r}-\frac{3}{2}\sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\theta}\right).$$

(γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται πάνω στην επιφάνεια του σώματος M οι συνιστώσες του $\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$ (με κόκκινο οι εφαπτομενικές και με πράσινο οι ακτινικές), καθώς και το ολικό $\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$ (μαύρα βέλη).



(δ) Η βαρυτική δύναμη ανά μάζα νερού από το σώμα M είναι $-\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ και από το σώμα M_0 είναι $-\vec{\nabla}\Phi\approx\vec{a}_0+\vec{g}_{\pi\alpha\lambda}$. Στον νόμο Νεύτωνα πρέπει να προσθέσουμε και την υποθετική δύναμη ανά μάζα $-\vec{a}_0$ διότι η αρχή του συστήματος αναφοράς (το κέντρο του σώματος M) επιταχύνεται με $\vec{a}_0$ λόγω της βαρύτητας από το M_0.

Αυτή η υποθετική δύναμη ανά μάζα εξουδετερώνει τον όρο $\vec{a}_0$ του $-\vec{\nabla}\Phi$ κι έτσι μένουν η βαρύτητα του M και η παλιρροϊκή δύναμη οι οποίες δίνουν δύναμη ανά μάζα $-\vec{\nabla}\left(-\frac{GM}{r} - \frac{GM_0 r^2}{r_0^3}\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)$. Αν ο όγκος του νερού ισορροπεί αυτή η δύναμη δεν πρέπει να έχει συνιστώσα παράλληλα στην επιφάνεια (κάθετα μπορεί να μην είναι μηδενική· εξουδετερώνεται από δυνάμεις υδροστατικής πίεσης). Συνεπώς η επιφάνεια είναι ισοδυναμική $-\frac{GM}{r} - \frac{GM_0 r^2}{r_0^3}P_2(\cos\theta) = \mathcal{C}$.

Η ακτίνα είναι περίπου σταθερή και ίση με R γιατί ο δεύτερος όρος είναι μικρός σε σχέση με τον πρώτο. Άρα και η σταθερά είναι περίπου ίση με $-GM/R$.

Θέτοντας $r = R(1+\zeta)$, $\mathcal{C} = -\frac{GM}{R}(1+\delta)$ με $|\zeta|, |\delta| \ll 1$ και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς ζ, δ, αλλά και $\xi = M_0R^3/Mr_0^3$, βρίσκουμε (χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $(1+\epsilon)^\nu \approx 1+\nu\epsilon$), $\zeta \approx \xi P_2(\cos\theta) - \delta$.

Αν μια σφαίρα αλλάξει σχήμα από $r = R$ σε $r = r(\theta)$ η συνθήκη ο όγκος να μένει σταθερός είναι $\frac{4\pi R^3}{3} = \int_0^{r(\theta)}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \approx \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi R^3(1+3\zeta)\sin\theta\,d\theta = \frac{4\pi R^3}{3} + 2\pi R^3\int_0^\pi \zeta\sin\theta\,d\theta$, άρα πρέπει να ισχύει $\int_0^\pi \zeta\sin\theta\,d\theta = 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi [\xi P_2(\cos\theta) - \delta]\sin\theta\,d\theta = 0$. Αλλάζοντας μεταβλητή σε $\mu = \cos\theta$ είναι $\int_{-1}^1\left[\xi\frac{3\mu^2-1}{2} - \delta\right]d\mu = 0 \Leftrightarrow \left[\xi\frac{\mu^3-\mu}{2} - \delta\mu\right]_{-1}^1 = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$.

Έτσι προκύπτει $\zeta = \xi P_2(\cos\theta)$, δηλ. σχήμα $r = R + \frac{M_0R^4}{Mr_0^3}\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$. Είναι ελλειπτικό, με κέντρο της έλλειψης στο κέντρο του M, μεγάλο ημιάξονα $a = r|_{\theta=0} = R + \frac{M_0R^4}{Mr_0^3}$ στην διεύθυνση προς το σώμα M_0 και μικρό ημιάξονα $b = r|_{\theta=\pi/2} = R - \frac{M_0R^4}{2Mr_0^3}$ στην κάθετη διεύθυνση.

Η σχέση $\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{b}\right)^2 = 1$ ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με $\left(\frac{r}{R}\right)^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{a/R}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b/R}\right)^2\right] = 1 \Leftrightarrow (1+\zeta)^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{1+\xi}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{1-\xi/2}\right)^2\right] = 1 \Leftrightarrow (1+2\zeta)\left[(1-2\xi)\cos^2\theta + (1+\xi)\sin^2\theta\right] = 1 \Leftrightarrow \zeta = \xi P_2(\cos\theta)$.