Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 Ν. Βλαχάκης

---

1. Τα διαστημικά σκουπίδια είναι μεγάλος αριθμός σωμάτων διαφόρων διαστάσεων που κινούνται γύρω από την Γη σε ελλειπτικές τροχιές. Έστω ότι οι εκκεντρότητές τους καλύπτουν το εύρος $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Αν θέλουμε να θέσουμε ένα δορυφόρο σε κυκλική τροχιά ακτίνας r υπάρχει – έστω μικρή – πιθανότητα να συγκρουστεί με ένα τέτοιο σκουπίδι. Ποιες είναι οι δυνατές ταχύτητες σύγκρουσης;

---

2. Δύο σώματα ίδιας μάζας $m_1 = m_2 = 1$ και στροφορμής $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \hat{z}$ κινούνται στο ίδιο επίπεδο xy, μέσα στο βαρυτικό πεδίο $V = -\dfrac{m}{r}$ (V είναι η δυναμική ενέργεια η οποία είναι ανάλογη της μάζας του εκάστοτε κινούμενου σώματος). Το ένα κινείται κυκλικά και το άλλο ελλειπτικά. Ο λόγος ενεργειών τους είναι $3/4$.
(α) Ποια η εκκεντρότητα της ελλειπτικής τροχιάς;
(β) Αν τα σώματα συγκρούονται βρείτε σε ποιο σημείο γίνεται η σύγκρουση (σε ποια γωνία σε σχέση με το περίκεντρο της τροχιάς του m_2).
(γ) Ποιες οι ταχύτητες πριν την κρούση; Αν αυτή είναι πλαστική, ποια η ταχύτητα του συσσωματώματος;
(δ) Τι τροχιά εκτελεί το συσσωμάτωμα; Σχεδιάστε και τις τρεις τροχιές στο ίδιο σχήμα.

---

3. Δύο ίδια σώματα μάζας $m_1 = m_2 = m$ βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο, λείο επίπεδο xy, δεμένα στα άκρα αβαρούς συστήματος ελατηρίου–αποσβεστήρα με σταθερά επαναφοράς $k = m\omega^2/2$, μηδενικό φυσικό μήκος και σταθερά απόσβεσης $m\gamma$. Αν δηλ. $\vec{R}_1$ και $\vec{R}_2$ είναι οι θέσεις των μαζών, η δύναμη που ασκείται στο m_2 είναι $-k(\vec{R}_2 - \vec{R}_1) - m\gamma(\dot{\vec{R}}_2 - \dot{\vec{R}}_1)$ και η δύναμη που ασκείται στο m_1 είναι αντίθετη.
Αρχικά τα σώματα βρίσκονται ακίνητα στην αρχή των αξόνων.
(α) Έστω $\gamma = 0$ και ασκούμε σταθερή δύναμη $2mA\hat{x}$ στο m_2. Βρείτε την θέση των μαζών σε κάθε χρόνο.
(β) Έστω $\gamma = \omega$ και ασκούμε δύναμη $4kB\cos(\omega t)\hat{x} + 4kB\sin(\omega t)\hat{y}$ στο m_2, όπου B σταθερά. Πως κινούνται οι μάζες σε «μεγάλους» χρόνους;

Λύσεις – Εργασία #6

---

1. Η μέγιστη ταχύτητα σε κάθε ελλειπτική τροχιά συμβαίνει στο περίγειο $r_\pi = \dfrac{L^2/mk}{1+\varepsilon}$. Εκεί $L = mr_\pi v_\pi$, οπότε $v_\pi = \sqrt{\dfrac{k}{mr_\pi}(1+\varepsilon)}$. Επομένως η μέγιστη ταχύτητα σκουπιδιού στην θέση r υλοποιείται αν η θέση αυτή συμπίπτει με το περίγειο της πιο έκκεντρης τροχιάς και είναι $\sqrt{\dfrac{k}{mr}(1+\varepsilon_0)}$.

Όμοια, η ελάχιστη ταχύτητα σε κάθε ελλειπτική τροχιά συμβαίνει στο απόγειο $r_\alpha = \dfrac{L^2/mk}{1-\varepsilon}$. Εκεί $L = mr_\alpha v_\alpha$, οπότε $v_\alpha = \sqrt{\dfrac{k}{mr_\alpha}(1-\varepsilon)}$. Επομένως η ελάχιστη ταχύτητα σκουπιδιού στην θέση r υλοποιείται αν η θέση αυτή συμπίπτει με το απόγειο της λιγότερο έκκεντρης τροχιάς και είναι $\sqrt{\dfrac{k}{mr}(1-\varepsilon_0)}$.

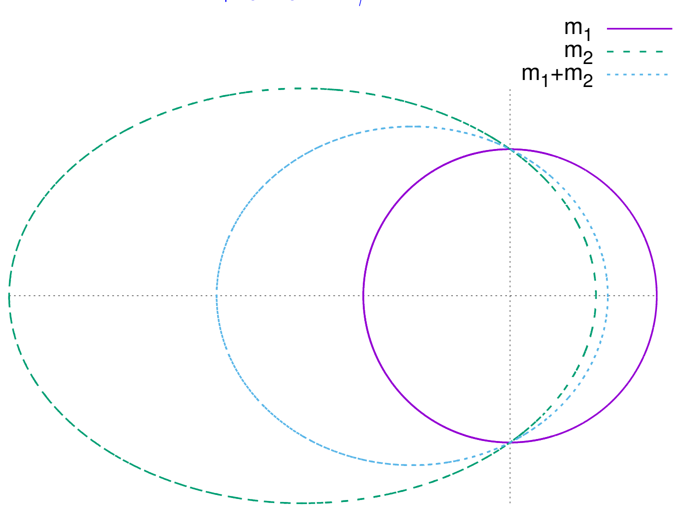
Αλλιώς: Συνδυάζοντας τις $\varepsilon^2 - 1 = \dfrac{2EL^2}{mk^2}$, $r = \dfrac{L^2/mk}{1+\varepsilon\cos\phi}$, $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{k}{r} = E$ βρίσκουμε $2 - \dfrac{rmv^2}{k} = \dfrac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\phi}$. Για τροχιά συγκεκριμένης εκκεντρότητας αυτή η ποσότητα παίρνει ελάχιστη τιμή $1-\varepsilon$ στο περίγειο (αναμενόμενο αφού εκεί η ταχύτητα είναι μέγιστη) και μέγιστη τιμή $1+\varepsilon$ στο απόγειο (εκεί η ταχύτητα είναι ελάχιστη). Άρα $1-\varepsilon \le 2 - \dfrac{rmv^2}{k} \le 1+\varepsilon$. Οι ακραίες των ακραίων τιμές συμβαίνουν για εκκεντρότητα ε_0, δηλ. $1-\varepsilon_0 \le 2 - \dfrac{rmv^2}{k} \le 1+\varepsilon_0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{GM}{r}(1-\varepsilon_0)} \le v \le \sqrt{\dfrac{GM}{r}(1+\varepsilon_0)}$.

Αφού η ταχύτητα του δορυφόρου είναι $\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ η σχετική ταχύτητα σύγκρουσης είναι $0 \le v_{\sigma\chi} \le \sqrt{\dfrac{GM}{r}} + \sqrt{\dfrac{GM}{r}(1+\varepsilon_0)}$.

---

2. (α) Για το σώμα που κινείται κυκλικά (δείκτης «1») είναι $\dfrac{v_1^2}{r_1} = \dfrac{1}{r_1^2}$ με $v_1 = L_1/r_1 = 1/r_1$, άρα η ακτίνα της τροχιάς είναι $r_1 = 1$, η ταχύτητά του $v_1 = 1$ και η ενέργειά του $E_1 = -1/2$.
Για το σώμα που κινείται ελλειπτικά (δείκτης «2») η ενέργεια είναι $E_2 = (3/4)E_1 = -3/8$. Η περίπτωση $E_2 = (4/3)E_1 = -2/3$ απορρίπτεται γιατί το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού είναι η ενέργεια της κυκλικής κίνησης με ίδια στροφορμή, δηλ. $-1/2$ (αυτό φαίνεται και από το διάγραμμα του ενεργού δυναμικού).
Η σχέση $\varepsilon^2 - 1 = \dfrac{2EL^2}{mk^2} = -\dfrac{3}{4}$ δίνει $\varepsilon = 0.5$.
Το ότι αποκλείεται $E_2 = (4/3)E_1 = -2/3$ φαίνεται και από το ότι δίνει $\varepsilon^2 < 0$.
(β) Για το σώμα 2 είναι $r_2 = \dfrac{L^2/mk}{1+\varepsilon\cos\phi} = \dfrac{1}{1+0.5\cos\phi}$. Οι ακτίνες γίνονται ίσες όταν $\phi = \pm\pi/2$.
(γ) Οι $\hat\phi$ συνιστώσες των ταχυτήτων είναι ίδιες διότι η στροφορμή και η θέση είναι ίδιες, δηλ. $v_{2\phi} = v_1 = 1$. (Έχουν ίδια φορά αφού οι στροφορμές είναι ομόρροπες.) Το «2» έχει επιπλέον ακτινική ταχύτητα $v_{2r} = \dot r$ η οποία βρίσκεται από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot r^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{k}{r} = E \Leftrightarrow \dot r = \pm 1/2$ με το πάνω πρόσημο να αντιστοιχεί στην θέση $\phi = \pi/2$ (όπου το σώμα απομακρύνεται από το περίκεντρο) και το κάτω στην $\phi = -\pi/2$.
Από διατήρηση ορμής, μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα $\vec u$ με $\hat\phi$ συνιστώσα ίση με την αρχική $u_\phi = 1$ και μισή ακτινική $u_r = \pm 1/4$ (γιατί έχει διπλάσια μάζα).

(δ) Σίγουρα το συσσωμάτωμα έχει αρνητική ενέργεια (αφού λόγω της πλαστικής κρούσης η ολική ενέργεια – η οποία ήταν αρνητική – μειώθηκε), οπότε θα εκτελέσει ελλειπτική τροχιά.
Η μάζα είναι $m_\sigma = 2$, η ενέργεια $E = \dfrac{m_\sigma(u_r^2 + u_\phi^2)}{2} - \dfrac{2}{r} = -\dfrac{15}{16}$ (το πεδίο είναι τώρα $V = -\dfrac{m_\sigma}{r} = -\dfrac{2}{r}$, δηλ. $-\dfrac{k_\sigma}{r}$ με $k_\sigma = 2$) και η στροφορμή $\vec{L}_\sigma = 2\hat{z}$ (από $m_\sigma r u_\phi$ είτε από διατήρηση στροφορμής κατά την κρούση).
Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι $\varepsilon_\sigma = \sqrt{1 + \dfrac{2EL_\sigma^2}{m_\sigma k_\sigma^2}} = 0.25$. Η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{L_\sigma^2/m_\sigma k_\sigma}{1 + \varepsilon_\sigma \cos(\phi - \phi_0)}$ οπότε ισχύει $1 = \dfrac{1}{1 + 0.25\cos(\pm\pi/2 - \phi_0)}$, δηλ. $\phi_0 = 0$ και το περίκεντρο της νέας τροχιάς παραμένει στον άξονα που ήταν και το παλιό της τροχιάς του «2». Το νέο περίκεντρο βέβαια είναι σε απόσταση $\dfrac{1}{1+0.25} = 0.8$ (ενώ το παλιό ήταν σε απόσταση $\dfrac{1}{1+0.5} = 0.67$). Το νέο απόκεντρο είναι σε απόσταση $\dfrac{1}{1-0.25} = 1.33$ (ενώ το παλιό ήταν σε απόσταση $\dfrac{1}{1-0.5} = 2$).
Τα ίδια προκύπτουν και από την λύση της $U'' + U = \dfrac{k_\sigma m_\sigma}{L_\sigma^2} = 1$ για την $1/r = U(\phi)$. Είναι $U = 1 + A\cos\phi + B\sin\phi$ με αρχικές συνθήκες $U = 1$ και $U' = -\dfrac{\dot{r}}{r^2\dot{\phi}} = -\dfrac{m_\sigma u_r}{L_\sigma} = \mp\dfrac{1}{4}$ για $\phi = \pm\pi/2$. Έτσι προκύπτει $B = 0$ και $A = 0.25$, δηλ. $r = \dfrac{1}{1 + 0.25\cos\phi}$.



---

3. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις που ισχύουν για προβλήματα δύο σωμάτων.

$$\left.\begin{array}{c} \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{R}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{R}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{array}\right.$$

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau} + \vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau}$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} + \mu\left(\frac{\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau}}{m_1}\right) \,, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(α) Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι η σταθερή δύναμη που ασκούμε, άρα για το κέντρο μάζας είναι $\ddot{\vec{R}} = A\hat{x}$. Ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε $\vec{R} = \frac{At^2}{2}\hat{x}$.

Η εξίσωση κίνησης για την σχετική θέση των σωμάτων προκύπτει να είναι $\ddot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = 2A\hat{x}$. Ολοκληρώνοντας κάθε συνιστώσα (αν και είναι προφανές ότι θα υπάρχει κίνηση μόνο στον $\hat{x}$ άξονα) κατά τα γνωστά (η γενική λύση είναι το άθροισμα της λύση της ομογενούς με μια μερική λύση) και χρησιμοποιώντας της αρχικές συνθήκες βρίσκουμε $\vec{r} = \frac{2A}{\omega^2}\left[1 - \cos(\omega t)\right]\hat{x} = \frac{4A}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\hat{x}$.

Η θέση κάθε σώματος είναι $\vec{R}_1 = \left[\frac{At^2}{2} - \frac{2A}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right]\hat{x}\,, \vec{R}_2 = \left[\frac{At^2}{2} + \frac{2A}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right]\hat{x}$.

(β) Όμοια, η εξίσωση κίνησης για το κέντρο μάζας είναι $\ddot{\vec{R}} = \omega^2 B\cos(\omega t)\hat{x} + \omega^2 B\sin(\omega t)\hat{y}$ και η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $X = B\left[1 - \cos(\omega t)\right]\,, Y = B\left[\omega t - \sin(\omega t)\right]$. Αυτή είναι μια κυκλοειδής καμπύλη.

Για την σχετική θέση των σωμάτων προκύπτει $\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = 4\omega^2 B\cos(\omega t)\hat{x} + 4\omega^2 B\sin(\omega t)\hat{y}$, άρα η λύση είναι σε κάθε κατεύθυνση άθροισμα της λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης. Η τελευταία βρίσκεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς. Οι $\hat{x}$ και $\hat{y}$ συνιστώσες μαζί γράφονται $\ddot{\zeta} + 2\gamma\dot{\zeta} + \omega^2\zeta = 4\omega^2 Be^{i\omega t}$ όπου $\zeta = x + iy$. Η μερική λύση είναι της μορφής $Ce^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $C = -i\frac{2\omega B}{\gamma}$, δηλ. $x_{\mu\epsilon\rho} + iy_{\mu\epsilon\rho} = -i\frac{2\omega B}{\gamma}e^{i\omega t}$. Άρα $x = x_{\text{ομ}} + \frac{2\omega B}{\gamma}\sin(\omega t)\,, y = y_{\text{ομ}} - \frac{2\omega B}{\gamma}\cos(\omega t)$.

Αν $\gamma = \omega$ (κρίσιμη απόσβεση) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που μας δίνει τις λύσεις της ομογενούς έχει διπλή λύση $-\omega$. Άρα $x_{\mu\epsilon\rho} = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t}\,, y_{\mu\epsilon\rho} = (D_1 + D_2 t)e^{-\omega t}$.

Η γενική λύση είναι $x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t} + 2B\sin(\omega t)\,, y = (D_1 + D_2 t)e^{-\omega t} - 2B\cos(\omega t)$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτει τελικά $x = -2B\omega te^{-\omega t} + 2B\sin(\omega t)\,, y = 2B(1 + \omega t)e^{-\omega t} - 2B\cos(\omega t)$.

Σε μεγάλους χρόνους ($t > 5/\omega$) το κέντρο μάζας κινείται σε κυκλοειδή και ταυτόχρονα το ελατήριο περιστρέφεται κατά την ορθή φορά, έχοντας σταθερό μήκος.
