Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 — Ν. Βλαχάκης

---

1. Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^n$, όπου k θετική σταθερά και n επίσης σταθερά με $n > 1$, $n \neq 3$.
(α) Ποιο το δυναμικό $V(r)$; Διαλέξτε τη σταθερά ώστε να μηδενίζεται στο άπειρο. Βρείτε και σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό.
(β) Ποια η ακτίνα r_o και η ενέργεια E_o της κυκλικής τροχιάς ακτίνας που αντιστοιχεί σε στροφορμή L;
(γ) Για ποιες τιμές του εκθέτη n η κυκλική τροχιά $r = r_o$ είναι ευσταθής; Ποια η συχνότητα των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων; (Θεωρήστε ότι η διαταραγμένη τροχιά έχει ίδια στροφορμή με την κυκλική τροχιά.)
(δ) Έστω το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά $r = r_o$, έχει στροφορμή L και η τιμή του εκθέτη είναι $1 < n < 3$. Κάποια στιγμή δίνουμε ενέργεια ΔE χωρίς να αλλάξουμε την στροφορμή. Για ποιες τιμές του ΔE η κίνηση παραμένει περατωμένη;
Ποια η εξίσωση της περατωμένης τροχιάς αν $n = 2$;

---

2. (α) Να βρεθεί πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ μέσα στο οποίο είναι δυνατή η ύπαρξη τροχιάς λογαριθμικής σπείρας $r = r_0 e^{\phi \cot \mu}$, όπου r_0 και μ σταθερές (r και ϕ είναι οι πολικές συντεταγμένες).
(β) Ποιες οι $\phi(t)$ και $r(t)$ γι' αυτή την τροχιά;
(γ) Βρείτε όλες τις δυνατές τροχιές στο συγκεκριμένο πεδίο.

---

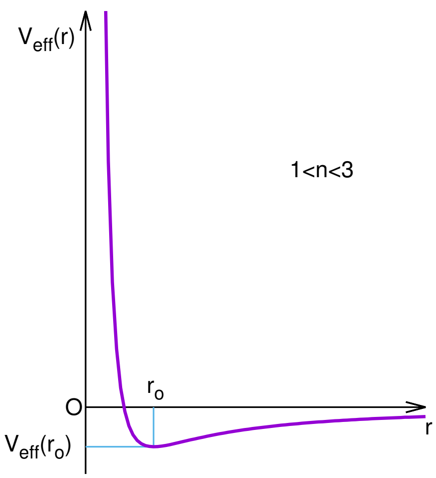
3. Σώμα κινείται σε πεδίο απωστικής κεντρικής δύναμης αντιστρόφου ανάλογης του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο, $\vec{F} = \dfrac{k}{r^2}\hat{r}$, $k > 0$.
(α) Δείξτε ότι η τροχιά έχει μορφή $r = \dfrac{p}{-1 + \varepsilon \cos \phi}$ με $p = \dfrac{L^2}{mk}$ και ε θετικές σταθερές.
(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα γράφεται σαν $\vec{v} = \dfrac{k\varepsilon}{L} \sin \phi \; \hat{r} + \dfrac{k}{L} \left(-1 + \varepsilon \cos \phi\right) \hat{\phi}$.
(γ) Αφού βρείτε την δυναμική ενέργεια $V(r)$ γράψτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας. Αντικαθιστώντας την θέση και ταχύτητα στο ολοκλήρωμα αυτό δείξτε τη σχέση $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}}$ μεταξύ της σταθεράς ε και της ενέργειας E. Διαπιστώστε ότι $E > 0$ συνεπάγεται $\varepsilon > 1$ και άρα η τροχιά είναι υπερβολική.
(δ) Σχεδιάστε την ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\rm eff}(r)$ και βρείτε τα όρια του r για δεδομένη ενέργεια και στροφορμή.

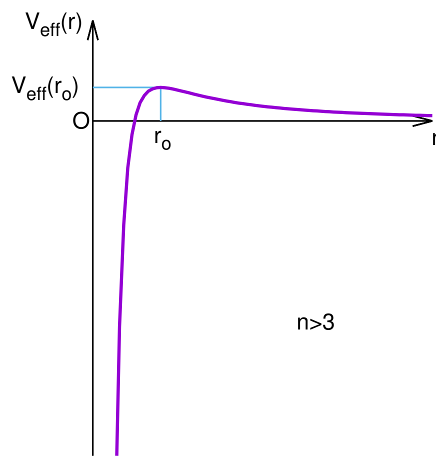
---

4. (α) Μια έλλειψη στο επίπεδο xy έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(0,0)$ και $\mathrm{E}'(-2a\varepsilon, 0)$. Βρείτε την εξίσωσή της σε πολικές συντεταγμένες με δεδομένο ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της $(r\cos\phi, r\sin\phi)$ από τις εστίες είναι $2a$.
(β) Δείξτε ότι η εξίσωση μιας υπερβολής σε πολικές, $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$ με $\varepsilon > 1$, είναι ισοδύναμη με την $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ για κατάλληλα x_0, y_0, a, b τα οποία και να βρείτε.

Λύσεις – Εργασία #5

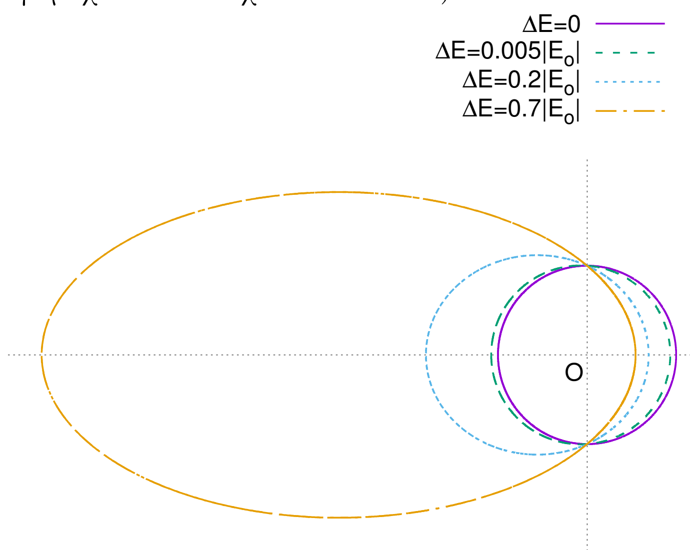
1. (α) $V(r) = -\int F\,dr = -\dfrac{k}{n-1}\dfrac{1}{r^{n-1}}$, μηδενίζοντας την σταθερά ολοκλήρωσης ώστε $\lim_{r\to\infty} V = 0$.
$V_{\rm eff}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{k}{n-1}\dfrac{1}{r^{n-1}}$, $V'_{\rm eff}(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} + \dfrac{k}{r^n} = \dfrac{k}{r^3}\left(r^{3-n} - \dfrac{L^2}{mk}\right)$, $V''_{\rm eff}(r) = \dfrac{3L^2}{mr^4} - \dfrac{nk}{r^{n+1}}$.
• Αν $1<n<3$ τότε είναι $V'_{\rm eff}(r) < 0$ για $r<r_o$ και $V'_{\rm eff}(r) > 0$ για $r>r_o$, όπου $r_o = \left(\dfrac{L^2}{mk}\right)^{1/(3-n)}$. Άρα το ενεργό δυναμικό είναι $+\infty$ στο $r=0$, μειώνεται μέχρι την ελάχιστη τιμή $V_{\rm eff}(r_o) = \dfrac{(n-3)k}{2(n-1)r_o^{n-1}}$ στο $r=r_o$ και στη συνέχεια αυξάνεται μέχρι την μηδενική τιμή στο άπειρο.
• Αν $n>3$ τότε είναι $V'_{\rm eff}(r) > 0$ για $r<r_o$ και $V'_{\rm eff}(r) < 0$ για $r>r_o$. Άρα το ενεργό δυναμικό είναι $-\infty$ στο $r=0$, αυξάνεται μέχρι την μέγιστη τιμή $V_{\rm eff}(r_o)$ στο $r=r_o$ και στη συνέχεια μειώνεται μέχρι την μηδενική τιμή στο άπειρο.





(β) Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι αυτή που αντιστοιχεί στην ακρότατη τιμή του $V_{\rm eff}(r)$ – δηλ. είναι η r_o – και η ενέργεια ισούται με την ακρότατη αυτή τιμή, δηλ. $E = V_{\rm eff}(r_o)$.
Το ερώτημα αυτό θα μπορούσε να απαντηθεί εξισώνοντας την κεντρομόλο δύναμη με τη δύναμη F, δηλ. $mv^2/r_o = k/r_o^n$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση $L = mr_ov \Leftrightarrow v = L/mr_o$ για την ταχύτητα.
(γ) Η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής για $1<n<3$ γιατί η $V_{\rm eff}$ έχει ελάχιστο στο $r=r_o$ (για $n>3$ είναι ασταθής γιατί η $V_{\rm eff}$ έχει μέγιστο στο $r=r_o$).
Γύρω από το r_o, δηλ. για $r = r_o + q$ με $|q| \ll r_o$, είναι $V_{\rm eff}(r) \approx V_{\rm eff}(r_o) + \frac{1}{2}V''_{\rm eff}(r_o)q^2$, όπου $V''_{\rm eff}(r_o) = \dfrac{3L^2}{mr_o^4} - \dfrac{nk}{r_o^{n+1}} = \dfrac{(3-n)k}{r_o^{n+1}}$. Άρα η ακτινική κίνηση ικανοποιεί προσεγγιστικά την εξίσωση $\dfrac{m\dot q^2}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{(3-n)k}{r_o^{n+1}}q^2 =$ σταθερά, ή, παραγωγίζοντας $\ddot q + \dfrac{(3-n)k}{mr_o^{n+1}}q = 0$. Για $n<3$ είναι εξίσωση ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{(3-n)k}{mr_o^{n+1}}}$ και συχνότητα $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(3-n)k}{mr_o^{n+1}}}$.
(δ) Από το γράφημα του $V_{\rm eff}$ (για την περίπτωση $1<n<3$) συμπεραίνουμε ότι η τροχιά είναι περατωμένη όσο η ενέργεια είναι αρνητική. Πρέπει λοιπόν $E<0 \Leftrightarrow E_o + \Delta E < 0$, δηλ. η ενέργεια που δίνουμε πρέπει να είναι $\Delta E < -E_o \Leftrightarrow \Delta E < \dfrac{(3-n)k}{2(n-1)r_o^{n-1}}$.
Για $n=2$, δηλ. για δυνάμεις $\vec F = -(k/r^2)\hat r$ με $k>0$, ξέρουμε ότι οι τροχιές είναι κωνικές τομές και

ειδικότερα για αρνητικές ενέργειες (έχοντας θεωρήσει μηδενική δυναμική ενέργεια στο $r \to \infty$) ότι είναι ελλείψεις. Επομένως το σχήμα της νέας τροχιάς είναι έλλειψη.
Η εκκεντρότητα της έλλειψης αυτής είναι $\varepsilon = \sqrt{1 + 2EL^2/mk^2}$ με $E = E_o + \Delta E = -k/2r_o + \Delta E = -mk^2/2L^2 + \Delta E$, γιατί για $n = 2$ είναι $E_o = -\dfrac{k}{2r_o}$ και $r_o = \dfrac{L^2}{mk}$, δηλ. είναι $\varepsilon = \sqrt{\Delta E/|E_o|}$. Για μικρές τιμές του $\Delta E/|E_o|$ παραμένει κοντά στο μηδέν (δηλ. η νέα τροχιά είναι σχεδόν κυκλική), ενώ για μεγαλύτερες τιμές του $\Delta E/|E_o|$ γίνεται μεγαλύτερη, αλλά παραμένει πάντα μικρότερη της μονάδας αφού $\Delta E < |E_o|$. Η εξίσωση της νέας τροχιάς είναι $r = \dfrac{r_o}{1 + \sqrt{\dfrac{\Delta E}{|E_o|}}\cos\phi}$ αφού το L^2/mk που υπάρχει στον αριθμητή της εξίσωσης $r = r(\phi)$ δεν αλλάζει – λόγω του ότι η στροφορμή δεν άλλαξε.
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η νέα ελλειπτική τροχιά γύρω από την αρχική κυκλική για διάφορες τιμές του $\Delta E/|E_o|$ (η αρχική κυκλική τροχιά αντιστοιχεί σε $\Delta E = 0$).



Αφού δεν αλλάζουμε την στροφορμή, ο τρόπος που αυξάνουμε την ενέργεια είναι μέσω στιγμιαίας αύξησης της ακτινικής ταχύτητας, δηλ. $\Delta E = \dfrac{mv_{r0}^2}{2}$. Αν $v_{r0} > 0$ το σημείο που έγινε η μεταβολή είναι το $\phi = \pi/2$ της νέας τροχιάς (δηλ. βρίσκεται σε γωνιακή απόσταση $\Delta\phi = \pi/2$ μετά το περίκεντρο της νέας τροχιάς. Όμοια αν $v_{r0} < 0$ το σημείο μεταβολής είναι το $\phi = -\pi/2$ της νέας τροχιάς (δηλ. βρίσκεται σε γωνιακή απόσταση $\Delta\phi = \pi/2$ πριν το περίκεντρο της νέας τροχιάς.

---

2. (α) Η τροχιά ενός σώματος που κινείται σε κεντρική δύναμη $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\dfrac{m}{L^2u^2}f\left(\dfrac{1}{u}\right)$, όπου $u = u(\phi)$, $u = 1/r$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση της δοσμένης τροχιάς $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_0}e^{-\phi\cot\mu}$ (οπότε $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} = u\cot^2\mu$) βρίσκουμε $f\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{L^2}{m\sin^2\mu}u^3 \overset{u=1/r}{\Longleftrightarrow} f(r) = -\dfrac{L^2}{m\sin^2\mu}\dfrac{1}{r^3}$.
(β) Από τη σχέση $\dot\phi = \dfrac{L}{mr^2}$, με $r = r_0e^{\phi\cot\mu}$, έχουμε $\dot\phi = \dfrac{L}{mr_0^2e^{2\phi\cot\mu}} \Leftrightarrow \displaystyle\int e^{2\phi\cot\mu}d\phi = \int\frac{L}{mr_0^2}dt \Leftrightarrow$
$\phi(t) = \tan\mu\ \ln\sqrt{\dfrac{2L\cot\mu}{mr_0^2}\,t + C}$, όπου C σταθερά ολοκλήρωσης.

Αντικαθιστώντας στην $r = r_0e^{\phi\cot\mu}$ βρίσκουμε $r(t) = \sqrt{\dfrac{2L\cot\mu}{m}\,t + Cr_0^2}$.
(γ) Αν η δύναμη έχει φορά προς το κέντρο και μέτρο αντιστρόφως ανάλογο του κύβου της απόστασης, δηλ. $f(r) = -k/r^3$ με $k > 0$, οι τροχιές ικανοποιούν την $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = \dfrac{mk}{L^2}u \Leftrightarrow \dfrac{d^2u}{d\phi^2} + \left(1 - \dfrac{mk}{L^2}\right)u = 0$.

• Αν $L^2 > mk$ έχει αρμονικές λύσεις $\dfrac{1}{r} = u = C_1 \sin(\phi \cos\lambda + C_2)$ με $\lambda = \arcsin \dfrac{\sqrt{mk}}{L}$ (οι C_1, C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης).

• Αν $L^2 = mk$ έχει λύσεις $\dfrac{1}{r} = u = C_1\phi + C_2$.

• Αν $0 < L^2 < mk$ έχει εκθετικές λύσεις $\dfrac{1}{r} = u = C_1 e^{\phi\cot\mu} + C_2 e^{-\phi\cot\mu}$ με $\mu = \arcsin\dfrac{L}{\sqrt{mk}}$.

• Αν $L = 0$ η κίνηση είναι ευθύγραμμη με $\phi = C_1$.

---

3. (α) Η τροχιά $r = \dfrac{1}{u(\phi)}$ σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων καθορίζεται από την σχέση $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\dfrac{m}{L^2u^2}\vec{F}\cdot\hat{r}$. Για την δεδομένη δύναμη $\vec{F} = ku^2\hat{r}$ γίνεται $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\dfrac{mk}{L^2}$ και έχει λύση $u = C\cos(\phi - \phi_0) - \dfrac{mk}{L^2}$ όπου C θετική σταθερά. Θέτοντας $C = \dfrac{mk}{L^2}\varepsilon$ και $\phi_0 = 0$ (στρέφοντας κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων) βρίσκουμε $u = \dfrac{mk}{L^2}(-1 + \varepsilon\cos\phi)$ και άρα $r = \dfrac{p}{-1 + \varepsilon\cos\phi}$ με $p = \dfrac{L^2}{mk}$ και ε θετικές σταθερές.
(β) Η ακτινική ταχύτητα είναι $\dot{r} = \dot{\phi}\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{L}{mr^2}\dfrac{dr}{d\phi} = -\dfrac{L}{m}u' = \dfrac{k}{L}\varepsilon\sin\phi$, η περιστροφική $r\dot{\phi} = \dfrac{L}{m}u = \dfrac{k}{L}(-1 + \varepsilon\cos\phi)$, οπότε η ταχύτητα γράφεται σαν $\vec{v} = \dfrac{k\varepsilon}{L}\sin\phi\,\hat{r} + \dfrac{k}{L}\left(-1 + \varepsilon\cos\phi\right)\hat{\phi}$.
(γ) $V(r) = -\displaystyle\int F(r)\,dr = \dfrac{k}{r}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Η κινητική ενέργεια είναι $\dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \dfrac{mk^2}{2L^2}\Big(\varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon\cos\phi\Big)$, ενώ η δυναμική ενέργεια είναι $V = ku = \dfrac{mk^2}{L^2}(-1 + \varepsilon\cos\phi)$. Επομένως το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $E = \dfrac{mv^2}{2} + V = \dfrac{mk^2}{2L^2}\Big(\varepsilon^2 - 1\Big)$, οπότε $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2L^2E}{mk^2}}$. Λόγω της $k > 0$ τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια είναι θετικές, οπότε $E > 0$. Άρα η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon > 1$ και άρα η τροχιά υπερβολική.
(δ) $V_{\text{eff}} = \dfrac{L^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{r}$ και $V'_{\text{eff}} = -\dfrac{L^2}{mr^3} - \dfrac{k}{r^2} < 0$, άρα η V_{eff} είναι φθίνουσα, μειώνεται από $\lim\limits_{r\to 0} V_{\text{eff}} = \infty$ σε $\lim\limits_{r\to\infty} V_{\text{eff}} = 0$.
Για δεδομένη ενέργεια και στροφορμή η επιτρεπτή περιοχή της ακτινικής κίνησης είναι $V_{\text{eff}} \le E \Leftrightarrow r \ge r_{\min}$ όπου $r_{\min}$ η θετική λύση της $V_{\text{eff}} = E \Leftrightarrow r_{\min} = \dfrac{p}{-1 + \varepsilon}$, όπως προκύπτει και από την εξίσωση τροχιάς.

---

4. (α) Η απόσταση κάθε σημείου Σ από την Ε είναι r και από την Ε′ είναι $\sqrt{(r\cos\phi + 2a\varepsilon)^2 + (r\sin\phi)^2} = \sqrt{r^2 + 4a\varepsilon r\cos\phi + 4a^2\varepsilon^2}$. Αν το Σ είναι σημείο της έλλειψης το άθροισμα των αποστάσεων είναι $2a$, ή ισοδύναμα $\sqrt{r^2 + 4a\varepsilon r\cos\phi + 4a^2\varepsilon^2} = 2a - r$. Υψώνοντας στο τετράγωνο $r^2 + 4a\varepsilon r\cos\phi + 4a^2\varepsilon^2 = (2a - r)^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\phi}$.
(β) Η εξίσωση γράφεται $r = p - \varepsilon r\cos\phi$. Θέτοντας $\cos\phi = x/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο είναι $x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2 \Leftrightarrow 0 = (\varepsilon^2 - 1)x^2 - 2\varepsilon px - y^2 + p^2$. Αφού $\varepsilon^2 > 1$ οι δύο πρώτοι όροι γράφονται $\left(\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,x - \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2 - \dfrac{\varepsilon^2p^2}{\varepsilon^2 - 1}$, άρα η εξίσωση της υπερβολής γράφεται $0 = \left(\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,x - \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2 - \dfrac{\varepsilon^2p^2}{\varepsilon^2 - 1} - y^2 + p^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,x - \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2 - y^2 = \dfrac{p^2}{\varepsilon^2 - 1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x - \varepsilon p/(\varepsilon^2 - 1)}{p/(\varepsilon^2 - 1)}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{p/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2 = 1$, δηλ. $a = \dfrac{p}{\varepsilon^2 - 1}$, $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, $x_0 = \varepsilon a$, $y_0 = 0$.
