Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 Ν. Βλαχάκης

---

1. Έστω ο πάσσαλος στην άσκηση 4 της εργασίας #1 περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Αρχικά, δηλ. για $t = 0$, είναι $\phi = 0$, $\dot{\phi} = v_0/\ell_0$ με $v_0 > 0$ και η ταχύτητα είναι κατάλληλη ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο. Αγνοήστε τις τριβές.
(α) Γράψτε τον νόμο Νεύτωνα στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς και τις $\hat{\varpi}_A$ και $\hat{\phi}_A$ συνιστώσες του.
(β) Αιτιολογήστε ότι υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» και μέσω αυτού βρείτε την $\phi(t)$.
(γ) Βρείτε την τάση του νήματος και διερευνήστε αν το νήμα παραμένει τεντωμένο.
(δ) Μελετώντας γραφικά την «δυναμική ενέργεια» βρείτε για ποιες τιμές της ω η γωνία ϕ συνεχώς αυξάνεται, δηλ. το νήμα τυλίγεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί το ευθύγραμμο μήκος του.
(ε) Έστω ο πάσσαλος είναι αβαρής και ελεύθερος να περιστραφεί. Αν αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο στη θέση $\phi = 0$, ο πάσσαλος είναι ακίνητος και το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $-v_0\hat{x}$ με $v_0 > 0$, ποια η θέση του σε κάθε χρόνο όσο το νήμα τυλίγεται;

---

2. Έστω ότι η επιφάνεια της Γης (γεωειδής) ήταν λεία και αξισυμμετρική. Με μόνο δεδομένο την ταχύτητα περιστροφής στον ισημερινό $\Omega R_e = 466$ m/s βρείτε πόση ταχύτητα v_0 πρέπει να δώσουμε σ' ένα σώμα στον βόρειο πόλο για να περάσει τον «λόφο δυναμικού» του ισημερινού και να φτάσει στο νότιο πόλο.
Ίσως σας βοηθήσει η παρακάτω πορεία:
(α) Γράψτε τον νόμο Νεύτωνα στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο της Γης.
(β) Ολοκληρώνοντας την $\hat{\phi}$ συνιστώσα του δείξτε ότι $\dot{\phi} = -\Omega$.
(γ) Δείξτε ότι υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας που δίνει $v^2 = v_0^2$.
(Προσέξτε ότι η συνισταμένη της επιτάχυνσης βαρύτητας και της φυγόκεντρου επιτάχυνσης ορίζουν την κατακόρυφο σε κάθε τόπο και άρα είναι κάθετη στην επιφάνεια της Γης.)
(δ) Συνδυάζοντας τα παραπάνω και για δεδομένο σχήμα της Γης $z = z(\varpi)$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες δείξτε ότι η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη και ισχύει $(1 + z'^2)\,\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\Omega^2 = v_0^2$ (με $z' = dz/d\varpi$).
(ε) Βρείτε τα όρια της τροχιάς για διάφορες v_0.

---

3. Σώμα μάζας m βρίσκεται ακίνητο στο πάτωμα ενός ακίνητου θαλάμου. Την στιγμή $t = 0$ θέτουμε τον θάλαμο σε οριζόντια ταλάντωση με απομάκρυνση από σταθερό σημείο $X_0\,[1 - \cos(\omega t)]$ οπότε το σώμα αρχίζει να κινείται επίσης. Στο σώμα ασκείται δύναμη αντίστασης κύλισης $-\lambda\vec{v}$ όπου $\vec{v}$ η ταχύτητά του ως προς το θάλαμο και λ σταθερά την οποία βολεύει να αντικαταστήσετε με $\lambda = m\omega\tan\beta$.
Μελετήστε την κίνηση του σώματος ως προς τον θάλαμο. Δείξτε ότι μετά από κάποιο χρόνο καταλήγει να είναι αρμονική ταλάντωση. Βρείτε το πλάτος της και την διαφορά φάσης σε σχέση με την ταλάντωση του θαλάμου.

---

4. Σώμα $m = 1$ εκτελεί γραμμική εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση. Η δυνάμεις επαναφοράς, απόσβεσης και διέγερσης είναι $-\dfrac{11}{3}x$, $-2\dot{x}$ και $\dfrac{100}{3}\cos t$, αντίστοιχα.
(α) Αν αρχικά ($t = 0$) είναι $x = 14$ και $\dot{x} = 0$, ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
(β) Μετά από πόσο χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση;
Ποιο είναι το πλάτος της και ποια η διαφορά φάσης της ταχύτητας με την διέγερση;
Πόση είναι τότε η μέση ενέργεια ανά χρόνο (ισχύς) που προσφέρει ο διεγέρτης;

Λύσεις – Εργασία #4

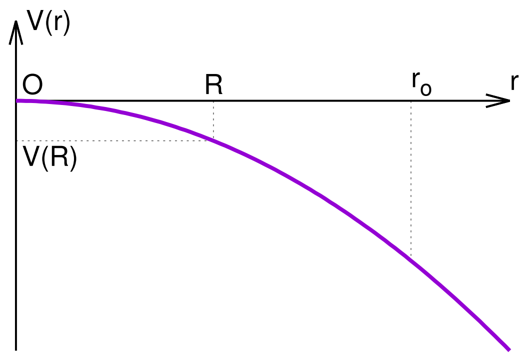
---

1. (α) Έστω το σύστημα Oxy περιστρέφεται μαζί με τον πάσσαλο (το σημείο A_0 βρίσκεται πάντα στην θέση $R\hat{x}$). Ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\vec{a}_\sigma = \vec{T} + m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma$, όπου $\vec{T}$ η τάση του νήματος, $m\omega^2\vec{r}$ η φυγόκεντρος και $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma$ η Coriolis (το βάρος και η κάθετη αντίδραση εξουδετερώνονται).
Στο περιστρεφόμενο αυτό σύστημα ισχύουν οι εκφράσεις που βρέθηκαν στην άσκηση 4 της εργασίας #1, δηλ. $\vec{r} = R\hat{\varpi}_A + \ell\hat{\phi}_A$, $\vec{v}_\sigma = -\ell\dot{\phi}\hat{\varpi}_A$, $\vec{a}_\sigma = (R\dot{\phi}^2 - \ell\ddot{\phi})\hat{\varpi}_A - \ell\dot{\phi}^2\hat{\phi}_A$, όπου $\ell = \ell_0 - R\phi$. Ισχύουν επίσης $\vec{T} = -T\hat{\phi}_A$ και $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = 2m\omega\ell\dot{\phi}\hat{z}\times\hat{\varpi}_A = 2m\omega\ell\dot{\phi}\hat{\phi}_A$. Επομένως οι $\hat{\varpi}_A$ και $\hat{\phi}_A$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα είναι $m(R\dot{\phi}^2 - \ell\ddot{\phi}) = m\omega^2 R$ και $-m\ell\dot{\phi}^2 = -T + m\omega^2\ell + 2m\omega\ell\dot{\phi}$.
Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς δηλ. στο μη-περιστρεφόμενο $Ox'y'$ που αρχικά ταυτίζεται με το Oxy. Σε αυτό το σύστημα το Α έχει γωνιακή συντεταγμένη $\phi_a = \phi + \omega t$, όπου η γωνία ϕ μετρά όπως πριν το πόσο μήκος έχει τυλιχτεί και το ευθύγραμμο μήκος του νήματος είναι $\ell = \ell_0 - R\phi = \ell_0 - R(\phi_a - \omega t)$. Η θέση γράφεται $\vec{r} = R\hat{\varpi}_A + \ell\hat{\phi}_A$ όπου $\hat{\varpi}_A = \cos\phi_a\,\hat{x} + \sin\phi_a\,\hat{y}$ και $\hat{\phi}_A = -\sin\phi_a\,\hat{x} + \cos\phi_a\,\hat{y}$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την ταχύτητα $\vec{v} = -\ell\dot{\phi}_a\hat{\varpi}_A + \omega R\hat{\phi}_A$ και την επιτάχυνση $\vec{a} = (R\dot{\phi}_a^2 - \ell\ddot{\phi}_a - 2\omega R\dot{\phi}_a)\hat{\varpi}_A - \ell\dot{\phi}_a^2\hat{\phi}_A$. Οι $\hat{\varpi}_A$ και $\hat{\phi}_A$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{T} = -T\hat{\phi}_A$ δίνουν $R\dot{\phi}_a^2 - \ell\ddot{\phi}_a - 2\omega R\dot{\phi}_a = 0$ και $T = m\ell\dot{\phi}_a^2$, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας $\phi_a = \phi + \omega t$ βρίσκουμε τις εξισώσεις που είχαμε βρει και στο περιστρεφόμενο σύστημα.
(β) Η $\vec{T}$ και η Coriolis δεν παράγουν έργο (κάθετες στην κίνηση) ενώ η φυγόκεντρος αντιστοιχεί σε «δυναμική ενέργεια» $V(r) = -\dfrac{m\omega^2 r^2}{2}$. Άρα υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\dfrac{mv_\sigma^2}{2} - \dfrac{m\omega^2 r^2}{2} = E$. Αντικαθιστώντας $v_\sigma^2 = \ell^2\dot{\phi}^2$ και $r^2 = R^2 + \ell^2$ γράφεται $\ell^2(\dot{\phi}^2 - \omega^2) = \dfrac{2E}{m} + \omega^2 R^2 =$ σταθερά.
Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ισοδύναμο με την $\hat{\varpi}_A$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα, δηλ. την προβολή του πάνω στην ταχύτητα, όπως αναμέναμε.
Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $\ell^2(\dot{\phi}^2 - \omega^2) = v_0^2 - \ell_0^2\omega^2$. Αφού $\dot{\phi} > 0$ η δεκτή λύση είναι

$$\dot{\phi} = \sqrt{\omega^2 + \frac{v_0^2 - \ell_0^2\omega^2}{(\ell_0 - R\phi)^2}} \Leftrightarrow \int_0^\phi \frac{(\ell_0 - R\phi)\,d\phi}{\sqrt{\omega^2(\ell_0 - R\phi)^2 + v_0^2 - \ell_0^2\omega^2}} = \int_0^t dt \Leftrightarrow \left[\sqrt{\omega^2(\ell_0 - R\phi)^2 + v_0^2 - \ell_0^2\omega^2}\right]_0^\phi =$$
$$-\omega^2 R t \Leftrightarrow \ell_0 - R\phi = \sqrt{\ell_0^2 - 2v_0 R t + \omega^2 R^2 t^2} \Leftrightarrow \phi = \frac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2v_0 R t + \omega^2 R^2 t^2}}{R}.$$

(γ) Από την $\hat{\phi}_A$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι $T = m\ell(\dot{\phi} + \omega)^2 > 0$ επομένως το νήμα παραμένει συνεχώς τεντωμένο.
Η απόλυτη ταχύτητα είναι $\vec{v} = \vec{v}_\sigma + \vec{\omega}\times\vec{r} = -\ell(\dot{\phi} + \omega)\hat{\varpi}_A + \omega R\hat{\phi}_A$ και αρχικά είναι $-(v_0 + \omega\ell_0)\hat{x} + \omega R\hat{y}$. Λόγω της $\hat{y}$ αρχικής συνιστώσας το νήμα μένει τεντωμένο αρχικά. Αυτή είναι ικανή συνθήκη για να μένει τεντωμένο και σε μεταγενέστερους χρόνους.

(δ) Η «δυναμική ενέργεια» είναι η απωστική της φυγόκεντρου $V(r) = -\dfrac{m\omega^2 r^2}{2}$.



Αρχικά είναι $r = r_o = \sqrt{\ell_0^2 + R^2}$ και $v_\sigma = \ell\dot{\phi} = v_0$, επομένως η ενέργεια είναι $E = \dfrac{m(v_0^2 - \omega^2\ell_0^2 - \omega^2R^2)}{2}$.
Αν $E \geq V(R)$ η επιτρεπτή περιοχή κίνησης επεκτείνεται μέχρι την $r = R$, θέση που αντιστοιχεί σε $\ell = 0$.
Άρα για να τυλίγεται συνεχώς το νήμα πρέπει να είναι $\dfrac{m(v_0^2 - \omega^2\ell_0^2 - \omega^2R^2)}{2} \geq -\dfrac{m\omega^2R^2}{2} \Leftrightarrow |\omega| \leq \dfrac{v_0}{\ell_0}$.
Αν $|\omega| > \dfrac{v_0}{\ell_0}$ το νήμα τυλίγεται μέχρι να φτάσει στην θέση όπου $V(r) = E \Leftrightarrow \ell = \sqrt{\ell_0^2 - \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$. Από την σχέση $\ell = \sqrt{\ell_0^2 - 2v_0Rt + \omega^2R^2t^2}$ βρίσκουμε ότι αυτό συμβαίνει σε $t_m = \dfrac{v_0}{\omega^2 R}$ και $\phi_m = \dfrac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - v_0^2/\omega^2}}{R}$.
Στην συνέχεια το νήμα ξετυλίγεται. Μέχρι την αρχική θέση $\phi = 0$ ισχύει $\dot{\phi} = -\sqrt{\omega^2 + \dfrac{v_0^2 - \ell_0^2\omega^2}{(\ell_0 - R\phi)^2}} \Leftrightarrow$
$\displaystyle\int_{\phi_m}^{\phi} \frac{(\ell_0 - R\phi)\,d\phi}{\sqrt{\omega^2(\ell_0 - R\phi)^2 + v_0^2 - \ell_0^2\omega^2}} = -\int_{t_m}^{t} dt \Leftrightarrow \left[\sqrt{\omega^2(\ell_0 - R\phi)^2 + v_0^2 - \ell_0^2\omega^2}\right]_{\phi_m}^{\phi} = \omega^2R(t - t_m) \Leftrightarrow \ell_0 - R\phi = \sqrt{\ell_0^2 - 2v_0Rt + \omega^2R^2t^2} \Leftrightarrow \phi = \frac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2v_0Rt + \omega^2R^2t^2}}{R}$, δηλ. ισχύουν οι ίδιοι τύποι για όλο το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2t_m$.
(ε) Αφού ο πάσσαλος είναι αβαρής και ελεύθερος να περιστραφεί η ροπή που ασκεί (και δέχεται) είναι μηδενική, δηλ. η τάση του νήματος είναι $T = 0$. Συνεπώς το σώμα θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, με $\vec{v} = -v_0\hat{x}' \Leftrightarrow \vec{r} = \ell_0\hat{y}' + (R - v_0t)\hat{x}'$ (τα μοναδιαία $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ του αδρανειακού είναι ίδια με τα αρχικά $\hat{x}$, $\hat{y}$ του περιστρεφόμενου Oxy).
Το ευθύγραμμο μήκος του νήματος είναι $\ell = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{\ell_0^2 + v_0^2t^2 - 2Rv_0t}$.
Αν ο πάσσαλος τον χρόνο t έχει στραφεί κατά $\Phi = \displaystyle\int_0^t \omega\,dt$ το σημείο A_0 έχει συντεταγμένες $x'_{A_0} = R\cos\Phi$, $y'_{A_0} = R\sin\Phi$ στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Το σημείο A έχει στραφεί κατά $\Phi + \phi$ όπου $\phi = \dfrac{\ell_0 - \ell}{R}$, άρα έχει συντεταγμένες $x'_A = R\cos(\Phi + \phi)$, $y'_A = R\sin(\Phi + \phi)$. Η σχέση $\vec{r} = R\hat{\varpi}_A + \ell\hat{\phi}_A$ δίνει $R - v_0t = R\cos(\Phi+\phi) - \ell\sin(\Phi+\phi)$ και $\ell_0 = R\sin(\Phi+\phi) + \ell\cos(\Phi+\phi)$. Αυτές δίνουν $\sin(\Phi+\phi) = \dfrac{\ell_0R - \ell(R - v_0t)}{R^2 + \ell^2}$, $\cos(\Phi + \phi) = \dfrac{\ell_0\ell + R(R - v_0t)}{R^2 + \ell^2}$ και καθορίζουν πλήρως την γωνία στροφής του κυλίνδρου.
Η μελέτη μπορεί να γίνει, αλλά πολύ πιο δύσκολα, στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Οι $\hat{\varpi}_A$ και $\hat{\phi}_A$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a}_\sigma = m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ δίνουν $R\dot{\phi}^2 - \ell\ddot{\phi} = \omega^2R + \dot{\omega}\ell$ και $-\ell\dot{\phi}^2 = \omega^2\ell + 2\omega\ell\dot{\phi} - \dot{\omega}R \Leftrightarrow \dot{\omega}R = \ell(\omega + \dot{\phi})^2$, αντίστοιχα, όπου $\ell = \ell_0 - R\phi$.
Η πρώτη γράφεται $\ell\ddot{\ell} + \dot{\ell}^2 = \omega^2R^2 + R\ell\dot{\omega}$ και η δεύτερη $\dot{\omega}R^3 = \ell(\omega R - \dot{\ell})^2$. Απαλείφοντας το $\dot{\omega}$ μεταξύ τους προκύπτει $(\ell^2 + R^2)\omega^2 - 2\dfrac{\ell^2\dot{\ell}}{R}\omega + \dfrac{\ell^2\dot{\ell}^2}{R^2} - \ell\ddot{\ell} - \dot{\ell}^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{\ell^2\dot{\ell}/R \pm \sqrt{(\ell^2 + R^2)\ell\ddot{\ell} + R^2\dot{\ell}^2}}{\ell^2 + R^2}$. Παραγωγίζοντας την τελευταία βρίσκουμε $\dot{\omega} = \dfrac{\pm(3\dot{\ell}\ddot{\ell} + \ell\dddot{\ell})}{2\sqrt{(\ell^2 + R^2)\ell\ddot{\ell} + R^2\dot{\ell}^2}} + \dfrac{(\ell^2 + R^2)\ell^2\ddot{\ell}/R + 2R\ell\dot{\ell}^2 \mp 2\ell\dot{\ell}\sqrt{(\ell^2 + R^2)\ell\ddot{\ell} + R^2\dot{\ell}^2}}{(\ell^2 + R^2)^2}$.
Αντικαθιστώντας στην $\dot{\omega}R^3 = \ell(\omega R - \dot{\ell})^2$ τόσο το ω όσο και το $\dot{\omega}$ προκύπτει $3\dot{\ell}\ddot{\ell} + \ell\dddot{\ell} = 0$. Η σχέση αυτή γράφεται $\dfrac{d^3(\ell^2/2)}{dt^3} = 0$ και η ολοκλήρωσή της δίνει $\ell = \sqrt{C_1t^2 + C_2t + C_3}$. Άρα $\phi = \dfrac{\ell_0 - \sqrt{C_1t^2 + C_2t + C_3}}{R}$ και $\omega = \dfrac{(C_1t + C_2/2)\ell/R \pm \sqrt{C_1C_3 + C_1R^2 - C_2^2/4}}{C_1t^2 + C_2t + C_3 + R^2}$. Οι αρχικές συνθήκες $\ell = \ell_0$, $\dot{\ell} = -R\dot{\phi} = -v_0$ και $\omega = 0$ καθορίζουν τις σταθερές $C_3 = \ell_0^2$, $C_2 = -2Rv_0$, $C_1 = v_0^2$ και το πρόσημο (πάνω). Τελικά η λύση είναι

$\ell = \sqrt{v_0^2 t^2 - 2Rv_0 t + \ell_0^2}$, $\phi = \dfrac{\ell_0 - \sqrt{v_0^2 t^2 - 2Rv_0 t + \ell_0^2}}{R}$ και $\omega = \dfrac{v_0 \ell_0 - v_0(1 - v_0 t/R)\sqrt{v_0^2 t^2 - 2Rv_0 t + \ell_0^2}}{\ell_0^2 + (R - v_0 t)^2}$.
Η ολοκλήρωση της τελευταίας δίνει την γωνία στροφής του κυλίνδρου $\Phi = \int_0^t \omega\, dt = \int_0^t \dfrac{v_0 \ell_0\, dt}{\ell_0^2 + (R - v_0 t)^2} - \int_0^t \dfrac{\sqrt{\ell_0^2 + (R - v_0 t)^2 - R^2}}{\ell_0^2 + (R - v_0 t)^2} \dfrac{(R - v_0 t) v_0 dt}{R}$. Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αλλαγή μεταβλητής $\phi_\Sigma = \operatorname{arccot} \dfrac{R - v_0 t}{\ell_0}$, οπότε $v_0 dt = \dfrac{\ell_0 d\phi_\Sigma}{\sin^2 \phi_\Sigma}$ και προκύπτει ίσο με $\int_0^t \dfrac{d\phi_\Sigma}{dt} dt = \operatorname{arccot} \dfrac{R - v_0 t}{\ell_0} - \operatorname{arccot} \dfrac{R}{\ell_0}$.
Το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αλλάζοντας την μεταβλητή στην ρίζα, που είναι ίση με ℓ.
Είναι $d\ell = -\dfrac{(R - v_0 t) v_0 dt}{\ell}$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\int_{\ell_0}^{\ell} \dfrac{\ell^2}{\ell^2 + R^2} \dfrac{d\ell}{R} = \int_{\ell_0}^{\ell} \left(1 - \dfrac{R^2}{\ell^2 + R^2}\right) \dfrac{d\ell}{R} = \dfrac{\ell - \ell_0}{R} - \arctan \dfrac{\ell}{R} + \arctan \dfrac{\ell_0}{R}$. Τελικά βρίσκουμε $\Phi = -\phi + \operatorname{arccot} \dfrac{R - v_0 t}{\ell_0} - \operatorname{arccot} \dfrac{R}{\ell}$.

---

2. (α) Στο μη-αδρανειακό σύστημα με αρχή το κέντρο της Γης, άξονα z τον άξονα περιστροφής και άξονες xy που περιστρέφονται με τη Γη, η εξίσωση κίνησης είναι $\dot{\vec{v}} = -2\Omega \hat{z} \times \vec{v} + \vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}/m$, όπου $\vec{N}$ η κάθετη αντίδραση και $\vec{g}_{\text{eff}}$ η συνισταμένη της επιτάχυνσης βαρύτητας και της φυγόκεντρου επιτάχυνσης.
(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$ και $\vec{a} = \left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.
Άρα η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης δίνει $\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = -2\Omega\dot{\varpi} \Leftrightarrow \varpi^2(\dot{\phi} + \Omega) = L =$ σταθερά.
Αφού αρχικά $\varpi = 0$ είναι $L = 0$ και επομένως κατά την διάρκεια της κίνησης ισχύει $\dot{\phi} = -\Omega$.
(γ) Σίγουρα η ελάχιστη v_0 αντιστοιχεί σε εφαπτομενικό πέρασμα του σώματος από τον «λόφο δυναμικού» στον ισημερινό. Αυτό επιτυγχάνεται αν βάλουμε το σώμα πάνω στην επιφάνεια (αν του δώσουμε και ταχύτητα προς τα πάνω είναι δύσκολο αν όχι αδύνατο – εξαρτάται από το ακριβές σχήμα της Γης – να περάσει εφαπτομενικά από τον ισημερινό). Καθώς το σώμα κινείται πάνω στην επιφάνεια της Γης, όλες οι δυνάμεις που του ασκούνται, συμπεριλαμβανομένων των ψευδοδυνάμεων (δηλ. όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της εξίσωσης κίνησης στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς) είναι κάθετες στην ταχύτητα, επομένως δεν παράγουν έργο και η κινητική ενέργεια διατηρείται, δηλ. $v^2 = v_0^2$.
Ισοδύναμα, από την εξίσωση κίνησης προκύπτει ότι η επιτρόχια επιτάχυνση είναι μηδέν αφού $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$, άρα $\dot{v} = 0$.
(δ) Με $z = z(\varpi)$, $\dot{z} = z'\dot{\varpi}$ και $\dot{\phi} = -\Omega$ είναι $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} - \varpi\Omega\hat{\phi} + z'\dot{\varpi}\hat{z}$ και άρα η σχέση $v^2 = v_0^2$ γράφεται $(1 + z'^2)\,\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\Omega^2 = v_0^2$.
(ε) Η εξίσωση αυτή δίνει την σχέση ακτίνας–χρόνου για δεδομένο σχήμα $z(\varpi)$ (μαζί με την $\phi = -\Omega t$ καθορίζουν πλήρως την κίνηση). Ακόμα κι αν δεν γνωρίζουμε όμως το ακριβές σχήμα μπορούμε μέσω αυτής να κατανοήσουμε την τροχιά και να βρούμε τα όριά της, σε αναλογία με σχέσεις της μορφής $T + V = E$ όπου τα όρια βρίσκονται μέσω της ανισότητας $V \le E$. Μάλιστα γράφοντάς την σαν $\dfrac{(1 + z'^2)\,\dot{\varpi}^2}{2} + \dfrac{\varpi^2\Omega^2}{2} = \dfrac{v_0^2}{2}$ ο πρώτος της όρος είναι πράγματι η κινητική ενέργεια ανά μάζα στο πολοειδές επίπεδο ϖz, αφού $v_\varpi^2 + v_z^2 = (1 + z'^2)\dot{\varpi}^2$, ο δεύτερος όρος είναι η περιστροφική κινητική ενέργεια ανά μάζα $\dfrac{v_\phi^2}{2}$ και αντιστοιχεί στο «δυναμικό», ενώ το δεξιό μέλος είναι η ενέργεια ανά μάζα. Καθώς το σώμα απομακρύνεται από τον άξονα περιστροφής και το «δυναμικό» $\dfrac{\varpi^2\Omega^2}{2}$ αυξάνεται, η «κινητική ενέργεια» μειώνεται και ανάλογα με την τιμή της ενέργειας, δηλ. της v_0, έχουμε τα ακόλουθα σενάρια:
- Αν $v_0 < \Omega R_e$ τότε το σώμα φτάνει μέχρι κυλινδρική ακτίνα v_0/Ω και γυρίζει πίσω στον βόρειο πόλο.
- Αν $v_0 > \Omega R_e$ τότε το τετράγωνο της πολοειδούς ταχύτητας $v_\varpi^2 + v_z^2 = v_0^2 - \varpi^2\Omega^2$ μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από τον άξονα, αλλά δεν μηδενίζεται ποτέ. Άρα σε αυτή την περίπτωση το σώμα θα φτάσει στον ισημερινό (εκεί $\dot{\varpi} = 0$ διότι η κλίση z' απειρίζεται) και θα περάσει στο νότιο ημισφαίριο. Εκεί το μέτρο

της πολοειδούς ταχύτητας αυξάνει και γίνεται πάλι v_0 όταν το σώμα φτάνει στο νότιο πόλο.
• Στην οριακή περίπτωση $v_0 = \Omega R_e$ το σώμα θα πλησιάζει επ' άπειρον τον ισημερινό (γιατί όσο πλησιάζει τόσο ελαττώνεται η πολοειδής ταχύτητα).
Η περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι καλύπτεται από τις δύο προηγούμενες: Η ταχύτητα v_0 είτε θα είναι απειροστά μεγαλύτερη από ΩR_e οπότε το σώμα έστω και αργά θα περάσει στο νότιο ημισφαίριο και τελικά στον νότιο πόλο, είτε θα είναι απειροστά μικρότερη, οπότε το σώμα θα ανακλαστεί έστω και αργά και θα γυρίσει στον βόρειο πόλο.
Η απάντηση στο πρόβλημα λοιπόν είναι ότι το σώμα πρέπει να έχει αρχική ταχύτητα τουλάχιστον $\Omega R_e = 466$ m/s για να φτάσει στο νότιο πόλο.
Η μελέτη μπορεί ισοδύναμα να γίνει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αρχή στο κέντρο της Γης, άξονα z τον άξονα περιστροφής και σταθερούς άξονες xy. Η εξίσωση κίνησης είναι $\dot{\vec{v}}_a = \vec{g} + \vec{N}/m$ όπου $\vec{g}$ η πραγματική επιτάχυνση βαρύτητας, η οποία έχει συνιστώσα πάνω στην επιφάνεια με φορά «προς τους πόλους» και δρα σαν δύναμη επαναφοράς. Επομένως η αρχική ταχύτητα πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλη για να περάσει το σώμα τον λόφο δυναμικού με μέγιστο στον ισημερινό (μετά θα «κατεβαίνει» προς το νότιο πόλο). Αν πετάξουμε αρχικά το σώμα με ταχύτητα $v_0\hat{x}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τον άξονα x) προφανώς η κίνηση θα γίνεται στο επίπεδο xz και η ταχύτητα θα είναι $\vec{v}_a = \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z}$ με $\dot{z} = z'\dot{x}$, όπου $z = z(x)$ το σχήμα της Γης και $z' = dz/dx$. Υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $v_a^2/2 + \Phi_g =$ σταθερό, αλλά το δυναμικό της βαρύτητας δεν είναι γνωστό.
Το κλειδί για την λύση είναι να σκεφτούμε ότι η επιφάνεια της Γης έχει διαμορφωθεί από το βάρος και την φυγόκεντρο και είναι ισοδυναμική του ολικού δυναμικού $\Phi_{\text{total}} = \Phi_g + \Phi_\phi$ με $\Phi_\phi = -\dfrac{\Omega^2 x^2}{2}$. Άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας, αντικαθιστώντας $\Phi_g = \Phi_{\text{total}} + \dfrac{\Omega^2 x^2}{2}$, δίνει $\dfrac{v_a^2}{2} + \dfrac{\Omega^2 x^2}{2} =$ σταθερό, ή $(1+z'^2)\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2 =$ σταθερό. Φτάσαμε σε ίδια εξίσωση με αυτή που είχαμε στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς (απλά έχουμε x αντί ϖ)· η μελέτη από εδώ και στο εξής συνεχίζεται όπως πριν.
(Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε και με βάση τις δυνάμεις. Η συνιστώσες του βάρους $\vec{g}$ και της φυγόκεντρου $\Omega^2 x\hat{x}$ πάνω στην επιφάνεια πρέπει να αλληλοαναιρούνται. Επομένως η συνιστώσα του βάρους πάνω στην επιφάνεια είναι ίση με την συνιστώσα της $-\Omega^2 x\hat{x}$ πάνω στην επιφάνεια. Πολλαπλασιάζοντας με την ταχύτητα την εξίσωση κίνησης καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα ενέργειας $\dot{\vec{v}}_a \cdot \vec{v}_a = -\Omega^2 x\hat{x}\cdot\vec{v}_a \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_a^2}{2}\right) = -\Omega^2 x\dot{x} \Leftrightarrow \dfrac{v_a^2}{2} + \dfrac{\Omega^2 x^2}{2} =$ σταθερό.)

---

3. Η εξίσωση κίνησης στο μη-αδρανειακό σύστημα του θαλάμου με άξονα $\hat{x}$ πάνω στην κίνηση του θαλάμου είναι $m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{a}_0 - \lambda\dot{\vec{r}}$ όπου $\vec{a}_0 = \dfrac{d^2}{dt^2}\left\{X_0\left[1-\cos(\omega t)\right]\hat{x}\right\} = X_0\omega^2\cos(\omega t)\hat{x}$. Προφανώς το σώμα κινείται στον άξονα x με εξίσωση κίνησης $m\ddot{x} = -ma_0 - \lambda\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega\tan\beta\,\dot{x} = -X_0\omega^2\cos(\omega t)$.
Η λύση της ομογενούς είναι $C_1 + C_2 e^{-\omega t\tan\beta}$.
Για να βρούμε μια μερική λύση, ένας τρόπος είναι χρησιμοποιώντας μιγαδικούς να σκεφτούμε την εξίσωση κίνησης σαν $\ddot{\zeta} + \omega\tan\beta\,\dot{\zeta} = -X_0\omega^2 e^{i\omega t}$ με $x = \Re\zeta$. Η μερική λύση είναι $De^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $D = \dfrac{X_0}{1 - i\tan\beta} = X_0\cos\beta e^{i\beta}$, δηλ. η μερική λύση είναι $x = \Re\left[X_0\cos\beta e^{i(\omega t+\beta)}\right] = X_0\cos\beta\cos(\omega t+\beta)$.
Άρα η γενική λύση για την θέση του σώματος είναι $x = C_1 + C_2 e^{-\omega t\tan\beta} + X_0\cos\beta\cos(\omega t+\beta)$.
Επιλέγοντας την αρχή του άξονα να είναι η αρχική θέση του σώματος είναι $x|_{t=0} = 0$.
Η ταχύτητα του θαλάμου είναι $\dfrac{d}{dt}\left\{X_0\left[1-\cos(\omega t)\right]\hat{x}\right\} = X_0\omega\sin(\omega t)\hat{x}$ και αρχικά είναι μηδενική. Αφού αρχικά το σώμα είναι ακίνητο, είναι ακίνητο και ως προς τον θάλαμο, δηλ. $\dot{x}|_{t=0} = 0$.
Οι δύο αυτές αρχικές συνθήκες καθορίζουν τις σταθερές $C_1 = 0$ και $C_2 = -X_0\cos^2\beta$ και τελικά βρίσκουμε $x = X_0\cos\beta\left[\cos(\omega t+\beta) - \cos\beta e^{-\omega t\tan\beta}\right]$.

Σε «μεγάλους» χρόνους (δηλ. πρακτικά για $t \gtrsim 5m/\lambda$) είναι $x = X_0 \cos\beta \cos(\omega t + \beta)$, δηλ. η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με πλάτος $X_0 \cos\beta$. Το πλάτος είναι κατά $\cos\beta$ μικρότερο από το πλάτος ταλάντωσης του θαλάμου. Επίσης υπάρχει διαφορά φάσης β μεταξύ της ταλάντωσης του θαλάμου και της ταλάντωσης του σώματος.
Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κίνηση ως προς αδρανειακό παρατηρητή, για τον οποίο η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x}_a = -\lambda(\dot{x}_a - \dot{X})$, με $X = X_0\left[1 - \cos(\omega t)\right]$ (η σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς τον θάλαμο είναι $\dot{x}_a - \dot{X}$). Οι δύο λύσεις συνδέονται μέσω $x_a = x + X$.

---

4. Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dfrac{11}{3}x = \dfrac{100}{3}\cos t$.

Η λύση της ομογενούς είναι $e^{\lambda t}$ με $\lambda^2 + 2\lambda + \dfrac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{\dfrac{8}{3}}$, δηλ. είναι $C_1 e^{-t}\cos(\omega t) + C_2 e^{-t}\sin(\omega t)$ με $\omega = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

Για να βρούμε μια μερική λύση, ένας τρόπος είναι χρησιμοποιώντας μιγαδικούς να σκεφτούμε την εξίσωση κίνησης σαν $\ddot{\zeta} + 2\dot{\zeta} + \dfrac{11}{3}\zeta = \dfrac{100}{3}e^{it}$ με $x = \Re\zeta$. Η μερική λύση είναι $\zeta = De^{it}$ με την αντικατάσταση να δίνει $D = \dfrac{100}{8+6i} = 8 - 6i$, δηλ. η μερική λύση είναι $x = \Re\left[(8-6i)e^{it}\right] = 8\cos t + 6\sin t$.
Επομένως η γενική λύση είναι $x = C_1 e^{-t}\cos(\omega t) + C_2 e^{-t}\sin(\omega t) + 8\cos t + 6\sin t$.
(α) Αν αρχικά ($t = 0$) είναι $x = 14$ και $\dot{x} = 0$ είναι $C_1 = 6$ και $C_2 = 0$, δηλ. η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x = 6e^{-t}\cos(\omega t) + 6\sin t + 8\cos t$.
(β) Για $t \gtrsim 5$ το εκθετικό είναι αμελητέο και η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση $x = 6\sin t + 8\cos t$.
Η θέση μπορεί να γραφεί σαν $x = D\cos\phi\sin t + D\sin\phi\cos t = D\sin(t+\phi)$, με $D\cos\phi = 6$ και $D\sin\phi = 8$, δηλ. με $D = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ και ϕ κοινή λύση των $\cos\phi = \dfrac{3}{5}$ και $\sin\phi = \dfrac{4}{5}$.
Στην μορφή αυτή φαίνεται ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $D = 10$.
Η διαφορά φάσης της ταχύτητας $v = \dot{x} = 10\cos(t+\phi)$ με την διέγερση είναι ϕ (η ταχύτητα προηγείται).
Η δύναμη του διεγέρτη είναι $\dfrac{100}{3}\cos t$, η ταχύτητα $v = \dot{x} = 6\cos t - 8\sin t$ και το γινόμενό τους είναι η στιγμιαία ισχύς που προσφέρει ο διεγέρτης $P = \dfrac{100}{3}\left(6\cos^2 t - 8\sin t\cos t\right)$.
Το ίδιο από $P = \dfrac{1000}{3}\cos t\cos(t+\phi)$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos(t+\phi) = \cos\phi\cos t - \sin\phi\sin t$.

Η μέση ισχύς είναι $\langle P\rangle = \dfrac{100}{3}\left(6\underbrace{\langle\cos^2 t\rangle}_{1/2} - 8\underbrace{\langle\sin t\cos t\rangle}_{0}\right) = 100$.

Το ίδιο από τον ορισμό της μέσης τιμής $\langle\ldots\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T(\ldots)\,dt$ όπου $T = 2\pi$ η περίοδος.
