Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο $V(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Αρχικά (για $t = 0$) ξεκινά από το σημείο $x_0 = -2$ και έχει ταχύτητα $v_0 \geq 0$.
Σχεδιάστε το γράφημα της $V(x)$ και μέσω αυτού βρείτε την v_0 σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις.
(α) Το σώμα καταλήγει με μηδενική ταχύτητα στο $x = -\infty$.
(β) Το σώμα περνάει μόνο μια φορά το σημείο $x = -1$ και δεν φτάνει ποτέ στο $x = 2$.
(γ) Το σώμα καταλήγει με ταχύτητα $v_\infty = 2$ στο $x = +\infty$.
(δ) Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με ελάχιστη τιμή της θέσης $x_{\min} = x_0$. Ποια είναι σε αυτή την περίπτωση η μέγιστη τιμή της θέσης $x_{\max}$ και η περίοδος της ταλάντωσης; (Γράψτε την περίοδο συναρτήσει κάποιου ορισμένου ολοκληρώματος, χωρίς να υπολογίσετε την αριθμητική της τιμή.)
(ε) Σχεδιάστε τις διάφορες καμπύλες στο διάγραμμα φάσης και δείξτε σε αυτό τις τροχιές που αντιστοιχούν στα προηγούμενα ερωτήματα.
(στ) Υπάρχουν σημεία ισορροπίας; Στα τυχόν ευσταθή βρείτε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων.

---

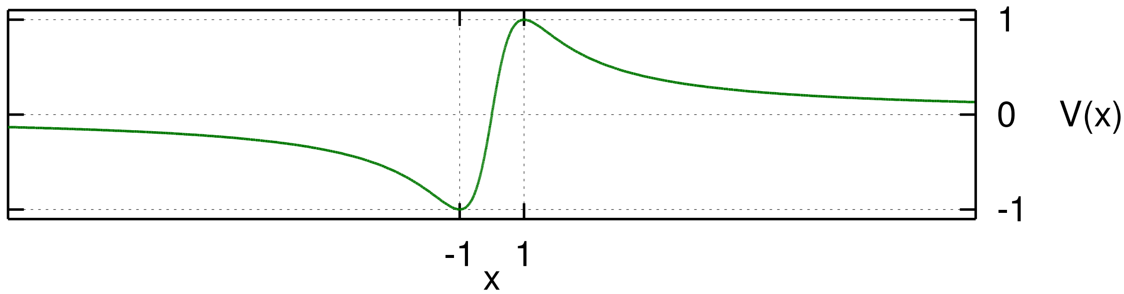
2. Φορτίο $q = 1$ μάζας $m = 1$ κινείται στο επίπεδο $z = 0$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \dfrac{2}{(1+\varpi^2)^2}\hat{z}$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες). Ο νόμος Νεύτωνα για την συγκεκριμένη κίνηση είναι $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{B}$.
(α) Δείξτε ότι η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει το ολοκλήρωμα $\varpi^2\dot{\phi} - \dfrac{1}{1+\varpi^2} = L =$ σταθερά.
(β) Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα αυτό γράψτε την $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα σαν $\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη»). Δείξτε ότι υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\varpi) = E =$ σταθερά με την «δυναμική ενέργεια» V_{eff} να ισούται με $\dfrac{v_\phi^2}{2}$.
(γ) Έστω το σώμα ξεκινά από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $v_0\hat{x}$ με $v_0 > 0$ (οπότε αρχικά $\varpi = 0$, $\phi = 0$, $\dot{\varpi} = v_0$).
Με τη βοήθεια του γραφήματος της $V_{\text{eff}}(\varpi)$ (βρείτε πρώτα την σταθερά L) περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της v_0.
Για μικρές τιμές της v_0 βρείτε την θέση συναρτήσει του χρόνου.

---

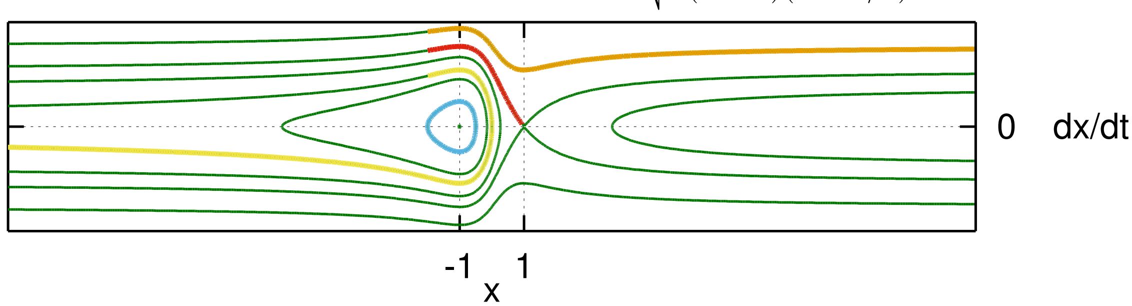
3. Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές περασμένο σε σταθερή, οριζόντια, κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 1$.
Το δαχτυλίδι είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους και σταθεράς $k = 1$, το άλλο άκρο του οποίου Α είναι σταθερό.
Έστω Oxy το επίπεδο της στεφάνης (Ο το κέντρο της) και το σημείο Α έχει θέση $\vec{r}_A = x_A\hat{x} + y_A\hat{y} + z_A\hat{z}$.
(α) Δείξτε ότι η επίδραση του ελατηρίου στην κίνηση του δαχτυλιδιού είναι ισοδύναμη με την επίδραση σταθερής δύναμης $k\,(x_A\hat{x} + y_A\hat{y})$. Ποια η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε αυτό το πεδίο;
(β) Αν το σημείο Α έχει $x_A = 3$, $y_A = 4$ και το δαχτυλίδι βρίσκεται αρχικά στην θέση $\phi = 0$, ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητά του ώστε να εκτελεί πλήρεις στροφές;
Υπόδειξη: Η παράσταση $x_A\cos\phi + y_A\sin\phi$ μπορεί να γραφεί σαν $\varpi_A\cos(\phi - \phi_A)$, χρησιμοποιώντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες του Α, $(\varpi_A,\, \phi_A,\, z_A)$.
(γ) Ποια είναι η θέση ισορροπίας του δαχτυλιδιού;
(δ) Αν αρχικά $\phi = 0$ και $v = 0$, μεταξύ ποιων γωνιών κινείται το δαχτυλίδι;

Λύσεις – Εργασία #3

1. Το δυναμικό είναι περιττή συνάρτηση οπότε αρκεί να μελετηθεί σε θετικά x. Είναι $V'(x) = 2\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
Άρα το δυναμικό είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $0 < x < 1$, αυξάνεται από $V(0) = 0$ σε $V(1) = 1$ και είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $x > 1$, μειώνεται από $V(1) = 1$ σε $V(+\infty) = 0$.



Η ενέργεια του σώματος είναι $E = \dfrac{v_0^2}{2} + V(-2) = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{4}{5}$.
(α) $E = \dfrac{v_{-\infty}^2}{2} + V(-\infty) = 0$, άρα $\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{8/5}$. (Το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα x μέχρι το $x = 0$ όπου $E = V(x)$, εκεί ανακλάται και στη συνέχεια κινείται προς μικρότερα x μέχρι το $-\infty$.)
(β) Αφού περνά μόνο μια φορά το $x = -1$ δεν ανακλάται. Αφού δεν φτάνει στο $x = 2$ δεν περνά τον λόφο δυναμικού. Άρα έχει ενέργεια ίση με το μέγιστο $E = 1$ και κινείται συνεχώς προς το $x = 1$. Είναι $E = 1 \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{18/5}$.
(γ) $E = \dfrac{v_\infty^2}{2} + V(+\infty) = 2$, άρα $\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{4}{5} = 2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{28/5}$.
(δ) Η θέση $x_0 = -2$ είναι ακραία, άρα $v_0 = 0$.
Η ενέργεια είναι $E = V(-2) = -\dfrac{4}{5}$ και το άλλο άκρο της κίνησης είναι η άλλη λύση της $E = V(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm 3}{4}$, δηλ. $x_{\max} = -1/2$.
Από το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = -\dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{-2V(x) - 8/5} = \pm\sqrt{-\dfrac{8(x+2)(x+1/2)}{5(x^2+1)}}$.
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{-2}^{-1/2} \sqrt{\frac{-5(x^2+1)}{2(x+2)(x+1/2)}}\, dx$.
(ε)



Η κίτρινη καμπύλη αντιστοιχεί στο (α), η κόκκινη στο (β), η πορτοκαλί στο (γ) και η γαλάζια στο (δ).
(στ) Σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα του δυναμικού. Στο $x = 1$ έχει μέγιστο και άρα το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Στο $x = -1$ έχει ελάχιστο και άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.
Για μικρές κινήσεις γύρω από το $x = -1$, με $x = -1 + q$ είναι $V(x) \approx V(-1) + V'(-1)q + \dfrac{1}{2}V''(-1)q^2$.

Είναι $V''(x) = -4x\dfrac{3-x^2}{(x^2+1)^3}$, άρα $V''(-1) = 1$ και $V \approx -1+\dfrac{q^2}{2}$. Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{q}^2}{2}+\dfrac{q^2}{2} =$ σταθερό και παραγωγίζοντας προκύπτει εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{q}+q=0$. Άρα η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 1$ και η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.

---

2. $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi}$, $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$, $\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\varpi} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \dot{\varpi} & \varpi\dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \dfrac{2\left(\varpi\dot{\phi}\hat{\varpi} - \dot{\varpi}\hat{\phi}\right)}{(1+\varpi^2)^2}$.

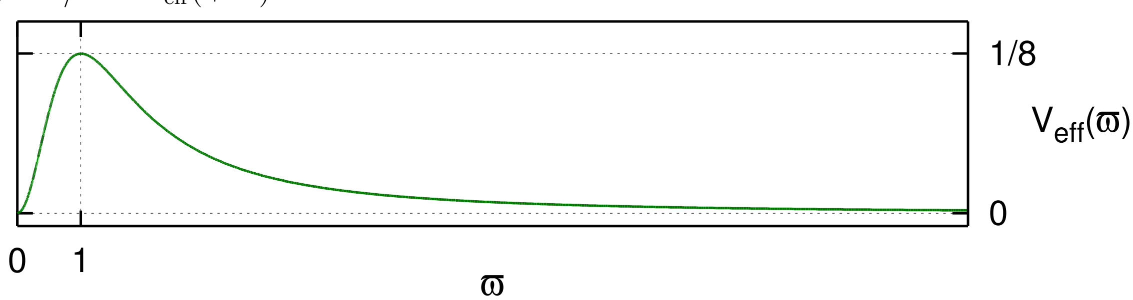
(α) Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = \dfrac{-2\dot{\varpi}}{(1+\varpi^2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = \dfrac{-2\varpi\dot{\varpi}}{(1+\varpi^2)^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{1+\varpi^2}\right)$ ολοκληρώνεται σε $\varpi^2\dot{\phi} - \dfrac{1}{1+\varpi^2} = L =$ σταθερά. Άρα $\dot{\phi} = \dfrac{L}{\varpi^2} + \dfrac{1}{\varpi^2(1+\varpi^2)}$.

(β) Αντικαθιστώντας την τελευταία στην $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2 = \dfrac{2\varpi\dot{\phi}}{(1+\varpi^2)^2}$ βρίσκουμε $\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ με $f(\varpi) = \left[\dfrac{L}{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi(1+\varpi^2)}\right]\left[\dfrac{L}{\varpi^2} + \dfrac{1+3\varpi^2}{\varpi^2(1+\varpi^2)^2}\right]$.

Για αυτή την «μονοδιάστατη» κίνηση υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\varpi) = E =$ σταθερά με $V_{\text{eff}}(\varpi) = -\displaystyle\int f(\varpi)d\varpi$. Αναμένουμε αυτή η «δυναμική ενέργεια» να είναι η περιστροφική κινητική, ώστε το ολοκλήρωμα ενέργειας να εκφράζει την διατήρηση κινητικής ενέργειας, η οποία ισχύει για κίνηση μέσα σε μαγνητικό πεδίο (η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετη στην ταχύτητα και δεν παράγει έργο). Πράγματι είναι $v_\phi = \varpi\dot{\phi} = \dfrac{L}{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi(1+\varpi^2)}$ και μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση $V_{\text{eff}}(\varpi) = \dfrac{v_\phi^2}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{L}{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi(1+\varpi^2)}\right]^2$ έχει παράγωγο ίση με $-f(\varpi)$, δηλ. είναι σωστή «δυναμική ενέργεια».

(γ) Από τις αρχικές τιμές προκύπτει $L=-1$, άρα $V_{\text{eff}} = \dfrac{\varpi^2}{2(1+\varpi^2)^2}$ και η ενέργεια $E = \dfrac{v_0^2}{2} + V_{\text{eff}}(0) = \dfrac{v_0^2}{2}$.

Για την συνάρτηση V_{eff} είναι $V'_{\text{eff}} = \dfrac{\varpi(1-\varpi^2)}{(1+\varpi^2)^3}$, άρα είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $0 < \varpi < 1$, αυξάνεται από $V_{\text{eff}}(0) = 0$ σε $V_{\text{eff}}(1) = 1/8$ και είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $\varpi > 1$, μειώνεται από $V_{\text{eff}}(1) = 1/8$ σε $V_{\text{eff}}(+\infty) = 0$.



- Αν $E > \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow v_0 > \dfrac{1}{2}$ το σώμα φτάνει στο $\varpi = \infty$.
- Αν $E = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow v_0 = \dfrac{1}{2}$ πλησιάζει επ΄ άπειρον τον κύκλο $\varpi = 1$ όπου η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη.
- Αν $0 < E < \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 0 < v_0 < \dfrac{1}{2}$ η κίνηση γίνεται στην περιοχή $\varpi \le \varpi_{\max}$, όπου $\varpi_{\max}$ η μικρότερη λύση της $V_{\text{eff}}(\varpi) = E \Leftrightarrow \varpi^4 + \left(2 - \dfrac{1}{2E}\right)\varpi^2 + 1 = 0$ δηλ. $\varpi_{\max} = \sqrt{\dfrac{4E}{1-4E+\sqrt{1-8E}}}$.
- Αν $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = 0$ το σώμα μένει ακίνητο.

Σε κάθε περίπτωση η γωνιακή συντεταγμένη καθορίζεται από $\dot{\phi} = -\dfrac{1}{1+\varpi^2}$.

Για μικρές τιμές της v_0 η κίνηση γίνεται κοντά στην αρχή, δηλ. $\varpi \ll 1$, οπότε $V_{\text{eff}} \approx \dfrac{\varpi^2}{2}$ και το ολοκλήρωμα της ενέργειας δίνει $\dfrac{\dot{\varpi}^2}{2}+\dfrac{\varpi^2}{2} = \text{σταθερά}$. Παραγωγίζοντας προκύπτει εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{\varpi}+\varpi = 0$ με γενική λύση $\varpi = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Από τις αρχικές συνθήκες $\varpi|_{t=0} = 0$, $\dot{\varpi}|_{t=0} = v_0$ προκύπτει τελικά $\varpi = v_0 \sin t$.

Για την γωνία $\dot{\phi} = -\dfrac{1}{1+\varpi^2} \approx -1$, άρα $\phi = -t$.

Η παραπάνω περιγραφή της κίνησης $\varpi = v_0 \sin t$ και $\phi = -t$ ισχύει μέχρι χρόνο $t = \pi$ (μετά δίνει $\varpi < 0$). Στον χρόνο αυτό όμως το σώμα φτάνει ξανά στην αρχή και η κίνηση επαναλαμβάνεται. Μάλιστα η κίνηση είναι ομαλή κυκλική με ταχύτητα μέτρου v_0, σε κύκλο ακτίνας $v_0/2$ και κέντρο το σημείο $x = 0$, $y = -v_0/2$, διότι οι $x = \varpi \cos\phi = v_0 \sin t \cos t$, $y = \varpi \sin\phi = -v_0 \sin^2 t$ δίνουν κύκλο $x^2 + (y+v_0/2)^2 = (v_0/2)^2$, όπως αναμένεται για κίνηση Larmor σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 2\hat{z}$.

---

3. (α) $\vec{F}_0 = -k(\vec{r}-\vec{r}_A) = -k\vec{r}+k\vec{r}_A$ και η διαφορά με την $\vec{F} = k\vec{r}_A = k\left(x_A\hat{x} + y_A\hat{y}\right)$ (δηλ. η δύναμη $-k\vec{r}$) είναι κάθετη στην κίνηση και δεν την επηρεάζει.

Η δυναμική ενέργεια της (σταθερής άρα και συντηρητικής) $\vec{F}$ είναι $V = -\displaystyle\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot\vec{r} + \cancelto{0}{\text{σταθερά}} = -kx_A x - ky_A y$.

Για το αρχικό πεδίο $\vec{F}_0$ η δυναμική ενέργεια είναι $V_0 = \frac{1}{2}kr^2 + V + \cancelto{0}{\text{σταθερά}}$. Βλέπουμε και έτσι ότι για κίνηση με σταθερό r η διαφορά δεν επηρεάζει.

(β) Για την κίνηση στην στεφάνη η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \dot{\phi}\hat{\phi}$. Η δυναμική ενέργεια είναι $-3\cos\phi - 4\sin\phi$ (αφού $x_A = 3$, $y_A = 4$, $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$). Χρησιμοποιώντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες του Α για τις οποίες $\varpi_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 5$, $\cos\phi_A = \dfrac{x_A}{\varpi_A} = \dfrac{3}{5}$, $\sin\phi_A = \dfrac{y_A}{\varpi_A} = \dfrac{4}{5}$ μπορεί να γραφεί σαν $-5\cos(\phi-\phi_A)$.

Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{\phi}^2}{2} - 5\cos(\phi-\phi_A) = E = \dfrac{v_0^2}{2} - 3$ αφού αρχικά $\phi = 0$ και $\dot{\phi} = v_0$.

Στην ουσία πρόκειται για στραμμένο εκκρεμές.

Η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι $-5\cos(\phi-\phi_A) \leq \dfrac{v_0^2}{2} - 3$. Για να ισχύει η ανισότητα σε όλα τα ϕ πρέπει $5 \leq \dfrac{v_0^2}{2} - 3 \Leftrightarrow |v_0| \geq 4$. Μάλιστα πρέπει να εξαιρέσουμε την ισότητα γιατί για $|v_0| = 4$ το σώμα θα πλησιάζει επ΄ άπειρον το σημείο μέγιστης δυναμικής ενέργειας και δεν θα κάνει πλήρεις περιστροφές.

Τα παραπάνω μπορούν να προκύψουν και μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας $V = -5\cos(\phi-\phi_A)$.

(γ) Η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη στην γωνία ϕ_A (την κοινή λύση των $\cos\phi_A = \dfrac{3}{5}$, $\sin\phi_A = \dfrac{4}{5}$) και μέγιστη στην αντιδιαμετρική $\phi_A + \pi$. Και οι δύο είναι θέσεις ισορροπίας, όμως η πρώτη είναι ευσταθής και η δεύτερη ασταθής.

(δ) Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα ενέργειας στην αρχική θέση προκύπτει $E = 0 - 5\cos\phi_A$. Άρα για την συγκεκριμένη κίνηση ισχύει $\dfrac{\dot{\phi}^2}{2} - 5\cos(\phi-\phi_A) = -5\cos\phi_A$. Οι ακραίες θέσεις είναι αυτές στις οποίες $V = E \Leftrightarrow \cos(\phi-\phi_A) = \cos\phi_A \Leftrightarrow \phi - \phi_A = 2k\pi \pm \phi_A$ με ακέραια k, δηλ. $\phi = 2k\pi$ και $\phi = 2k\pi + 2\phi_A$.
Η μια ακραία θέση είναι η αρχική $\phi = 0$. Μετά την ακραία αυτή θέση η γωνία ϕ πρέπει να αυξάνεται, ώστε η δυναμική ενέργεια $-5\cos(\phi-\phi_A)$ να μειώνεται. Η άλλη ακραία είναι λοιπόν η $2\phi_A$. Άρα η κίνηση γίνεται στο διάστημα $0 \leq \phi \leq 2\phi_A$.

Το ότι η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι μεταξύ της $\phi = 0$ και της αμέσως μεγαλύτερης λύσης της εξίσωσης $V = E$, η οποία είναι η $2\phi_A$, φαίνεται και στο γράφημα της δυναμικής ενέργειας $V = -5\cos(\phi-\phi_A)$.

Το αποτέλεσμα $0 \leq \phi \leq 2\phi_A$ είναι αναμενόμενο αφού οι δύο ακραίες θέσεις σε ένα εκκρεμές ισαπέχουν από την θέση ευσταθούς ισορροπίας $\phi = \phi_A$.
