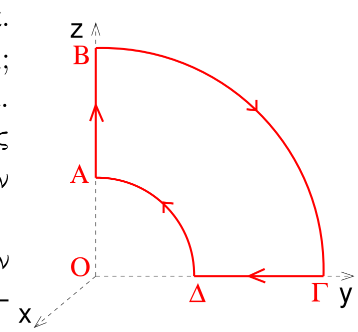
Μηχανική Ι – Εργασία #2

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 Ν. Βλαχάκης

1. Στην άσκηση 4 της εργασίας #1 αρχικά (για $t = 0$) είναι $\phi = 0$ και η ταχύτητα του σώματος είναι v_0 με φορά κάθετη στο νήμα ώστε αυτό να τυλίγεται στον πάσσαλο παραμένοντας τεντωμένο.
(α) Έστω ότι δεν υπάρχουν τριβές.
(α_1) Βρείτε πως αλλάζει η γωνία ϕ με τον χρόνο.
(α_2) Ποια η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα; Μέσω αυτής βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς και δείξτε ότι το στιγμιαίο κέντρο καμπυλότητας είναι το σημείο Α.
(α_3) Βρείτε την στροφορμή ως προς το Ο και σχολιάστε γιατί αλλάζει με τον χρόνο.
(β) Έστω υπάρχει τριβή ολίσθησης με συντελεστή μ και η επιτάχυνση βαρύτητας είναι g.
(β_1) Αιτιολογήστε γιατί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μειώνεται σαν $v = v_0 - \mu g t$.
(β_2) Βρείτε πως αλλάζει η γωνία ϕ με τον χρόνο.
(β_3) Βρείτε το έργο της τριβής και μέσω αυτού το μήκος που διανύει το σώμα σε χρόνο t.
(β_4) Δείξτε ότι αν $\mu > \dfrac{v_0^2 R}{g\ell_0^2}$ το σώμα σταματά πριν τυλιχθεί στον πάσσαλο όλο το μήκος του νήματος.

2. Ένα αεροπλάνο προσγειώνεται στον διάδρομο έχοντας αρχικά οριζόντια ταχύτητα v_0. Στο αεροπλάνο ασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: βάρος mg, κάθετη αντίδραση N, δύναμη τριβής λόγω των φρένων μέτρου μN, όπου μ ο συντελεστής τριβής, δύναμη αντίστασης αέρα $\frac{1}{2}C_D\rho S v^2$ όπου ρ η πυκνότητα αέρα, S η επιφάνεια των φτερών και C_D ο συντελεστής αντίστασης, και δύναμη ανύψωσης $\frac{1}{2}C_L\rho S v^2$ με φορά προς τα πάνω, όπου C_L ο συντελεστής ανύψωσης.
(α) Δείξτε ότι η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης είναι $\dfrac{dv^2}{dx} - \dfrac{v^2}{x_0} = -2\mu g$, όπου $x_0 = \dfrac{m}{(\mu C_L - C_D)\,\rho S}$. Βρείτε την απόσταση που θα διανύσει το αεροπλάνο μέχρι να σταματήσει.
(β) Δείξτε ότι η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου είναι $\dot{v} = \dfrac{v^2}{2x_0} - \mu g$. Βρείτε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το αεροπλάνο.
(γ) Εφαρμογή: $g = 9.8$ m/s^2, $\rho = 1.2$ kg/m^3, $m = 200000$ kg, $S = 500$ m^2, $C_D = 0.05$, $C_L = 0.7$, $\mu = 0.6$ και αρχική ταχύτητα v_0 που αντιστοιχεί σε αρχική ισορροπία μεταξύ βάρους και δύναμης ανύψωσης. Σε πόση απόσταση και σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το αεροπλάνο;
(δ) Για να σταματήσει διανύοντας μικρότερη απόσταση ενεργοποιούνται αυτόματα (μόλις οι τροχοί ακουμπήσουν στο διάδρομο) οι αποσβεστήρες άντωσης (spoilers) λόγω των οποίων αφενός μειώνεται ο συντελεστής ανύψωσης σε $C_L' < C_L$ και αφετέρου αυξάνεται ο συντελεστής αντίστασης σε $C_D' > C_D$. Σε πόση απόσταση και σε πόσο χρόνο θα σταματήσει τώρα αν $C_D' = 0.1$ και $C_L' = 0.4$;
Ποια η επιβράδυνση που νοιώθουν οι επιβάτες;

3. Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = 4\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)\left(x\hat{x} + y\hat{y} + \lambda z\hat{z}\right)$, με λ σταθερά.
(α) Ποιο το έργο της $\vec{F}$ για την κλειστή διαδρομή του σχήματος Α→Β→Γ→Δ→Α; Οι ΒΓ και ΔΑ ανήκουν σε κύκλους με κέντρο το Ο και ακτίνα 2 και 1, αντίστοιχα.
(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή της σταθεράς λ ίσως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική; Είναι πράγματι συντηρητική γι' αυτή την τιμή του λ; Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x, y, z)$;
(γ) Έστω η δύναμη αυτή ασκείται σε σώμα που έχει στροφορμή $\vec{L}$ ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς Ο. Για ποια τιμή της λ δεν αλλάζει την $\hat{x}$ συνιστώσα της στροφορμής;



Λύσεις – Εργασία #2

1. Στην άσκηση 4 της εργασίας #1 βρέθηκε ότι η θέση είναι $\vec{r} = R\hat{\varpi}_A + (\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A$, η ταχύτητα $\vec{v} = -(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\varpi}_A$ (κάθετη στο νήμα) και η επιτάχυνση $\vec{a} = \left[R\dot{\phi}^2 - (\ell_0 - R\phi)\ddot{\phi}\right]\hat{\varpi}_A - (\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi}_A$.
(α_1) Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος, η αντίδραση από το επίπεδο και η τάση του νήματος. Όλες είναι κάθετες στην κίνηση και δεν παράγουν έργο. Άρα το μέτρο της ταχύτητας μένει σταθερό και ίσο με την αρχική τιμή v_0, δηλ. $|(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}| = v_0$. Το μήκος $\ell_0 - R\phi$ είναι θετικό και η $\dot{\phi}$ είναι επίσης θετική αφού η γωνία αυξάνεται με τον χρόνο καθώς το νήμα τυλίγεται. Άρα $(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi} = v_0 \Leftrightarrow \int_0^{\phi}(\ell_0 - R\phi)d\phi = v_0\int_0^t dt \Leftrightarrow -\left[\dfrac{(\ell_0 - R\phi)^2}{2R}\right]_0^{\phi} = v_0 t \Leftrightarrow \ell_0 - R\phi = \sqrt{\ell_0^2 - 2Rv_0t} \Leftrightarrow \phi = \dfrac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2Rv_0t}}{R}$.
Αλλιώς: Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι η τάση του νήματος, άρα $m\vec{a} = \vec{T} \parallel \hat{\phi}_A$, οπότε πρέπει να μηδενίζεται η $\hat{\varpi}_A$ συνιστώσα της επιτάχυνσης $(\ell_0 - R\phi)\ddot{\phi} = R\dot{\phi}^2 \Leftrightarrow \dfrac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}d\phi} = \dfrac{R}{\ell_0 - R\phi} \Leftrightarrow d\ln|\dot{\phi}| = -d\ln|\ell_0 - R\phi| \Leftrightarrow (\ell_0 - R\phi)\dot{\phi} =$ σταθερά. Αυτή είναι η έκφραση του μέτρου ταχύτητας, το οποίο είναι αρχικά v_0. Δηλ. ισχύει $(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi} = v_0$ και συνεχίζουμε την ολοκλήρωση όπως πριν.
(α_2) Η αντικατάσταση της $\phi(t)$ στην έκφραση της επιτάχυνσης δίνει $\vec{a} = -\dfrac{v_0^2}{\ell_0 - R\phi}\hat{\phi}_A$, οπότε ο νόμος Νεύτωνα δίνει την τάση $\vec{T} = m\vec{a} = -T\hat{\phi}_A$ με $T = \dfrac{mv_0^2}{\ell_0 - R\phi}$.
Όπως αναμέναμε η επιτάχυνση είναι μόνο κεντρομόλος (αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό) και η τάση παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, δηλ. $\dfrac{mv_0^2}{\mathcal{R}} = T \Leftrightarrow \mathcal{R} = \ell_0 - R\phi$. Άρα το κέντρο καμπυλότητας είναι το σημείο Α που απέχει από το Σ απόσταση $\ell_0 - R\phi$.
(α_3) $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \left[R\hat{\varpi}_A + (\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A\right]\times m\left(-v_0\hat{\varpi}_A\right) = mv_0(\ell_0 - R\phi)\hat{z} = mv_0\sqrt{\ell_0^2 - 2v_0Rt}\,\hat{z}$.
Η στροφορμή δεν μένει σταθερή λόγω του ότι η τάση του νήματος ασκεί μη-μηδενική ροπή ως προς το Ο. Η ροπή αυτή είναι $\vec{r}\times\vec{T} = \left[R\hat{\varpi}_A + (\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A\right]\times\left(-T\hat{\phi}_A\right) = -RT\hat{z}$ και πράγματι ισχύει $\dot{L} = -RT$.
(β_1) Η κάθετη αντίδραση είναι ίση με το βάρος του σώματος mg, επομένως η τριβή F_τ έχει μέτρο μmg και φορά αντίθετη της ταχύτητας, δηλ. είναι $\vec{F}_\tau = -\mu mg\hat{\varepsilon}$, όπου $\hat{\varepsilon} = -\hat{\varpi}_A$ το μοναδιαίο στην φορά της κίνησης. Από τον νόμο Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_\tau$ η τάση του νήματος $\vec{T}$ είναι κάθετη στην κίνηση και παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, ενώ η τριβή είναι πάνω στην τροχιά και δίνει επιτρόχια επιτάχυνση $a_\varepsilon = -\dfrac{F_\tau}{m} = -\mu g$.
Αφού $a_\varepsilon = \dot{v}$ είναι $\dot{v} = -\mu g \Leftrightarrow v = v_0 - \mu g t$.
(β_2) $(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi} = v_0 - \mu g t \Leftrightarrow \int_0^{\phi}(\ell_0 - R\phi)d\phi = \int_0^t (v_0 - \mu g t)dt \Leftrightarrow \ell_0^2 - (\ell_0 - R\phi)^2 = \dfrac{v_0^2 - (v_0 - \mu g t)^2}{\mu g/R} \Leftrightarrow \phi = \dfrac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2Rv_0t + \mu gRt^2}}{R}$.
(β_3) Το έργο της τριβής είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας $W_\tau = \dfrac{m(v_0 - \mu g t)^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2}$.
Επίσης είναι ίσο με $W_\tau = -m\mu g s$ αφού η τριβή έχει σταθερό μέτρο $m\mu g$ και είναι πάντα αντίθετη της μετατόπισης (οπότε $\vec{T}\cdot d\vec{r} = -T ds$). Άρα το μήκος που διανύει το σώμα σε χρόνο t είναι $s = -\dfrac{W_\tau}{m\mu g} = \dfrac{v_0^2 - (v_0 - \mu g t)^2}{2\mu g}$.
Το ίδιο προκύπτει βέβαια από την σχέση $s = \int_0^t v\,dt$ με $v = v_0 - \mu g t$.

(β_4) Όταν το μήκος του νήματος που δεν έχει τυλιχθεί είναι $\ell_0 - R\phi = \ell$ η ταχύτητα είναι $v = v_0 - \mu g t$ και η σχέση μεταξύ τους έχει βρεθεί στο ερώτημα (β_2) να είναι $\ell_0^2 - \ell^2 = \dfrac{v_0^2 - v^2}{\mu g/R} \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 - \dfrac{\mu g}{R}\ell_0^2 + \dfrac{\mu g}{R}\ell^2$. Καθώς μειώνεται το ℓ^2 μειώνεται και η v^2. Το ποια θα μηδενιστεί πρώτα καθορίζεται από την σταθερά $v_0^2 - \dfrac{\mu g}{R}\ell_0^2$.

Αν αυτή είναι θετική, δηλ. αν $\mu < \dfrac{v_0^2 R}{g\ell_0^2}$, τότε ακόμα και για $\ell^2 = 0$ η v^2 είναι θετική, άρα το νήμα τυλίγεται όλο (η ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στον πάσσαλο, δηλ. όταν $\ell = 0$, είναι $\sqrt{v_0^2 - \frac{\mu g}{R}\ell_0^2}$).

Αντίθετα, αν η σταθερά είναι αρνητική, δηλ. αν $\mu > \dfrac{v_0^2 R}{g\ell_0^2}$, τότε η ταχύτητα μηδενίζεται για κάποια θετική τιμή του ℓ^2, άρα το σώμα σταματά πριν τυλιχθεί όλο το νήμα (αυτό συμβαίνει όταν το νήμα έχει μήκος $\ell = \sqrt{\ell_0^2 - \frac{v_0^2 R}{\mu g}}$).

Στην περίπτωση που η σταθερά είναι μηδέν, δηλ. αν $\mu = \dfrac{v_0^2 R}{g\ell_0^2}$, η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $\ell = 0$, δηλ. όλο το νήμα τυλίγεται και το σώμα φτάνει στον πάσσαλο με μηδενική ταχύτητα.

Συνεπώς μόνο αν $\mu > \dfrac{v_0^2 R}{g\ell_0^2}$ δεν τυλίγεται όλο το νήμα.

---

2. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη, έστω στον άξονα x με φορά $\hat{x}$, δηλ. $\vec{v} = v\hat{x}$ με $v = \dot{x} > 0$. Ο νόμος Νεύτωνα στην οριζόντια και κατακόρυφη κατεύθυνση δίνει $m\dot{v} = -\frac{1}{2}C_D\rho S v^2 - \mu N$ και $N = mg - \frac{1}{2}C_L\rho S v^2$.

(α) Με $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{dx}$ η εξίσωση κίνησης γράφεται $\dfrac{dv^2}{dx} - \dfrac{v^2}{x_0} = -2\mu g$, όπου $x_0 = \dfrac{m}{(\mu C_L - C_D)\,\rho S}$. Η γενική λύση είναι $v^2 = Ce^{x/x_0} + 2\mu g x_0$ (άθροισμα της λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης). Από την αρχική συνθήκη $v|_{x=0} = v_0$ βρίσκουμε την σταθερά, οπότε $v^2 = 2\mu g x_0 - (2\mu g x_0 - v_0^2)e^{x/x_0}$.

Η διαφορική εξίσωση κίνησης θα μπορούσε να λυθεί και σαν χωριζόμενων μεταβλητών: $\dfrac{dv^2}{dx} = \dfrac{v^2}{x_0} - 2\mu g$ οπότε $\displaystyle\int_{v_0^2}^{v^2} \frac{dv^2}{v^2 - 2\mu g x_0} = \int_0^x \frac{dx}{x_0} \Leftrightarrow \ln\left|\frac{v^2 - 2\mu g x_0}{v_0^2 - 2\mu g x_0}\right| = \frac{x}{x_0}$. Το απόλυτο φεύγει γιατί η ποσότητα $\dfrac{v^2}{x_0} - 2\mu g$ είναι ίση με $\dfrac{dv^2}{dx}$, δηλ. συνεχώς αρνητική.

Το αεροπλάνο σταματά ($v = 0$) αφού διανύσει απόσταση $-x_0 \ln\left(1 - \dfrac{v_0^2}{2\mu g x_0}\right)$.

Ανεξαρτήτως προσήμου του x_0 η ταχύτητα ελαττώνεται και τελικά μηδενίζεται. Ο μόνος περιορισμός είναι $\dfrac{v_0^2}{2\mu g x_0} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(C_L - C_D/\mu\right)\rho S v_0^2 < mg$, ο οποίος ισχύει διότι για να κατεβαίνει το αεροπλάνο σίγουρα είναι $\frac{1}{2}C_L\rho S v_0^2 \leq mg$.

(β) Η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τον νόμο Νεύτωνα. Είναι χωριζόμενων μεταβλητών και είναι ισοδύναμη με $\displaystyle\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2/2x_0 - \mu g}$.

• Αν $\mu C_L > C_D \Leftrightarrow x_0 > 0$ το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αλλαγή μεταβλητής $v = \xi\sqrt{2x_0\mu g}$, οπότε προκύπτει $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2/2x_0 - \mu g} = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}}\int \frac{2d\xi}{\xi^2 - 1} = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}}\int\left(\frac{1}{\xi - 1} - \frac{1}{\xi + 1}\right)d\xi = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}}\ln\left|\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right| = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}}\ln\left|\frac{v - \sqrt{2x_0\mu g}}{v + \sqrt{2x_0\mu g}}\right| = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}}\ln\frac{\sqrt{2x_0\mu g} - v}{\sqrt{2x_0\mu g} + v}$, αφού ισχύει $v \leq v_0 < \sqrt{2\mu g x_0}$ όπως σχολιάστηκε πριν (ισοδύναμα $\dot{v} < 0$). Δηλ. $t = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}} \ln \frac{\left(\sqrt{2x_0\mu g} + v_0\right)\left(\sqrt{2x_0\mu g} - v\right)}{\left(\sqrt{2x_0\mu g} - v_0\right)\left(\sqrt{2x_0\mu g} + v\right)}$ και η ταχύτητα μηδενίζεται σε χρόνο $t = \sqrt{\frac{x_0}{2\mu g}} \ln \frac{\sqrt{2x_0\mu g} + v_0}{\sqrt{2x_0\mu g} - v_0}$.

• Αν $\mu C_L < C_D \Leftrightarrow x_0 < 0$ το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αλλαγή μεταβλητής $v = \xi\sqrt{-2x_0\mu g}$, οπότε προκύπτει $\int \frac{dv}{v^2/2x_0 - \mu g} = -\sqrt{\frac{-2x_0}{\mu g}} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = -\sqrt{\frac{-2x_0}{\mu g}} \arctan \xi = -\sqrt{\frac{-2x_0}{\mu g}} \arctan \frac{v}{\sqrt{-2x_0\mu g}}$. Δηλ. η σχέση ταχύτητας–χρόνου είναι $t = \sqrt{\frac{-2x_0}{\mu g}} \left(\arctan \frac{v_0}{\sqrt{-2x_0\mu g}} - \arctan \frac{v}{\sqrt{-2x_0\mu g}} \right)$ και άρα η ταχύτητα μηδενίζεται σε χρόνο $t = \sqrt{\frac{-2x_0}{\mu g}} \arctan \frac{v_0}{\sqrt{-2x_0\mu g}}$.

• Αν $\mu C_L = C_D \Leftrightarrow |x_0| = \infty$ ο νόμος Νεύτωνα απλοποιείται σε $\dot{v} = -\mu g$ οπότε $v = v_0 - \mu g t$ και η ταχύτητα μηδενίζεται σε χρόνο $t = v_0/\mu g$.

Το αποτέλεσμα προκύπτει και σαν όριο των προηγούμενων περιπτώσεων για $x_0 \to \pm\infty$.

(γ) Αρχική ισορροπία μεταξύ βάρους και δύναμης ανύψωσης: $mg = \frac{1}{2} C_L \rho S v_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2mg}{C_L \rho S}} = 96.6$ m/s, $x_0 = 901$ m, $\frac{v_0^2}{2\mu g x_0} = 1 - \frac{C_D}{\mu C_L} = 0.88$. Το αεροπλάνο σταματά σε 30.2 s έχοντας διανύσει 1917 m.

(δ) $x_0' = 2381$ m, $\frac{v_0^2}{2\mu g x_0'} = \frac{\mu C_L' - C_D'}{\mu C_L} = 0.33$. Το αεροπλάνο σταματά σε 18.7 s έχοντας διανύσει 965 m. Η επιβράδυνση σε g είναι $\frac{-\dot{v}}{g} = \mu \left(1 - \frac{v^2}{2\mu g x_0}\right)$. Επομένως μόνο με τα φρένα είναι αρχικά $\mu \left(1 - \frac{v_0^2}{2\mu g x_0}\right) = 0.07$, όταν σηκώνονται τα spoilers αλλάζει ακαριαία σε $\mu \left(1 - \frac{v_0^2}{2\mu g x_0'}\right) = 0.4$ και στη συνέχεια αυξάνεται μέχρι να απελευθερωθούν τα φρένα (μέχρι την τιμή $\mu = 0.6$ αν τα φρένα συνεχώς λειτουργούν μέχρι να σταματήσει το αεροπλάνο).

---

3. (α) Για την διαδρομή Α→Β είναι $x = y = 0$, $z = 1 \to 2$, $d\vec{r} = dz\hat{z}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\lambda z(z^2 - 4)dz$, άρα $W_{AB} = \int_1^2 4\lambda z(z^2 - 4)dz = \lambda \left[z^4 - 8z^2\right]_1^2 = -9\lambda$.

Για την διαδρομή Β→Γ είναι $x = 0$ και $y^2 + z^2 = 4$, επομένως $\vec{F} = 0$ και $W_{B\Gamma} = 0$.

Για την διαδρομή Γ→Δ είναι $x = z = 0$, $y = 2 \to 1$, $d\vec{r} = dy\hat{y}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4y(y^2 - 4)dy$, άρα $W_{\Gamma\Delta} = \int_2^1 4y(y^2 - 4)dz = \left[y^4 - 8y^2\right]_2^1 = 9$.

Για την διαδρομή Δ→Α είναι $x = 0$ και $y^2 + z^2 = 1$. Μια βολική παραμετροποίηση είναι $y = \sin\theta$, $z = \cos\theta$ με $\theta = \pi/2 \to 0$. Έτσι $dy = \cos\theta\, d\theta$, $dz = -\sin\theta\, d\theta$, $d\vec{r} = (\cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{z})d\theta$, $\vec{F} = -12(\sin\theta\hat{y} + \lambda\cos\theta\hat{z})$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 12(\lambda - 1)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$, άρα $W_{\Delta A} = 12(\lambda - 1)\int_{\pi/2}^0 \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 6 - 6\lambda$.

Η παραμετροποίηση που χρησιμοποιήθηκε είναι ουσιαστικά οι σφαιρικές συντεταγμένες. Σε αυτές, η τροχιά Δ→Α έχει $r = 1$, $\phi = \pi/2$ και $\theta = \pi/2 \to 0$. Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι $d\vec{r} = r\, d\theta\, \hat{\theta}$ με $\hat{\theta} = \cos\theta\, \hat{y} - \sin\theta\, \hat{z}$.

(β) Το ολικό έργο στην κλειστή διαδρομή είναι $15 - 15\lambda$. Αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική είναι να μηδενίζεται, δηλ. $\lambda = 1$.

Για $\lambda = 1$ η δύναμη είναι κεντρική, $\vec{F} = 4(r^2 - 4)\vec{r} = F(r)\hat{r}$ με $F(r) = 4r^3 - 16r$, άρα είναι αστρόβιλη και συνεπώς συντηρητική. Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V = -\int F(r)dr = 8r^2 - r^4 = 8(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2$ (μηδενίσαμε την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).

Στο ίδιο καταλήγουμε και αν δουλέψουμε σε καρτεσιανές, επιλύοντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $-\dfrac{\partial V}{\partial x} = 4x\left(x^2+y^2+z^2-4\right)$, $-\dfrac{\partial V}{\partial y} = 4y\left(x^2+y^2+z^2-4\right)$, $-\dfrac{\partial V}{\partial z} = 4z\left(x^2+y^2+z^2-4\right)$. Η ολοκλήρωση της πρώτης δίνει $V = -x^4 - 2x^2(y^2+z^2-4) + C(y,z)$, η αντικατάσταση στην δεύτερη δίνει $-\dfrac{\partial C}{\partial y} = 4y(y^2+z^2-4) \Leftrightarrow C = -y^4 - 2y^2(z^2-4) + D(z)$ και η αντικατάσταση στην τρίτη δίνει $-\dfrac{\partial D}{\partial y} = -4z(z^2-4) \Leftrightarrow D = -z^4 + 8z^2 + C_0$ όπου C_0 αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Άρα $V = -x^4 - 2x^2(y^2+z^2-4) - y^4 - 2y^2(z^2-4) - z^4 + 8z^2 + C_0 = 8(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2)^2 + C_0$. Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι η $\vec{F}$ είναι συντηρητική ελέγχοντας αν είναι αστρόβιλη, δηλ. αν $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$. Το να βρούμε όμως συνάρτηση V για την οποία ισχύει $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ είναι ταυτόχρονα απόδειξη ότι η δύναμη είναι αστρόβιλη, άρα συντηρητική.

(γ) Αφού $\dot{\vec{L}} = \vec{r}\times\vec{F}$ πρέπει η $\hat{x}$ συνιστώσα της ροπής $\vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ να μηδενίζεται, δηλ. πρέπει $yF_z = zF_y \Leftrightarrow \lambda = 1$.
