Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019 Ν. Βλαχάκης

---

1. Ένα ελικόπτερο για να μένει αιωρούμενο (ακίνητο) πρέπει να καταναλώνει ισχύ $\mathcal{P}$ η οποία εξαρτάται από το βάρος του W, την επιφάνεια που διαγράφει η έλικά του A και την πυκνότητα του αέρα ρ. Βρείτε διαστατικά την σχέση $\mathcal{P} \propto W^a A^b \rho^c$.

---

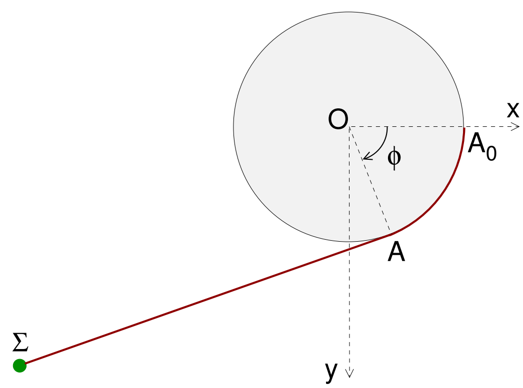
2. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ και οι απέναντι γωνίες είναι A, B, C, αντίστοιχα.
(α) Μέσω της $\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ δείξτε τον νόμο των συνημιτόνων.
(β) Δείξτε την $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$ και μέσω αυτής τον νόμο των ημιτόνων.

---

3. Σώμα κινείται στο επίπεδο xy και σε κάθε χρόνο $t > 0$ έχει θέση $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$.
(α) Βρείτε την ταχύτητά του $\vec{v}$ και την επιτάχυνσή του $\vec{a}$.
(β) Δείξτε ότι σε μικρούς χρόνους ($t \ll 1$) το σώμα αρχίζει να κινείται στον άξονα x.
(γ) Σχεδιάστε την τροχιά του σώματος βασισμένοι στο πως αλλάζει με το χρόνο η κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας.
(δ) Βρείτε το εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά, τις επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσες της επιτάχυνσης, την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς και το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας.
(ε) Βρείτε το μήκος της τροχιάς που διανύει το σώμα σε χρόνο t.
(στ) Βρείτε τις γωνίες μεταξύ $\vec{a}$, $\vec{v}$, μεταξύ $\vec{r}$, $\vec{v}$ και μεταξύ $\vec{a}$, $\vec{r}$. Δείξτε ότι είναι αντίστοιχα, $\arctan t$, $\arctan t$, $2 \arctan t$.

---

4. Σώμα Σ μάζας m κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο μέσω ενός αβαρούς και μη-εκτατού νήματος μήκους ℓ_0 με ένα σταθερό κατακόρυφο πάσσαλο ακτίνας R. Η κάτοψη φαίνεται στο δίπλα σχήμα. Το σταθερό άκρο του νήματος είναι το A_0, το μέρος του $\mathrm{A}_0\mathrm{A}$ είναι τυλιγμένο στον πάσσαλο, ενώ το υπόλοιπο ΑΣ είναι τεντωμένο. Οι πολικές συντεταγμένες του Α είναι R, ϕ και τα αντίστοιχα μοναδιαία $\hat{\varpi}_A = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$, $\hat{\phi}_A = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$.



(α) Αιτιολογήστε γιατί η θέση του Σ γράφεται συναρτήσει της γωνίας ϕ σαν $\vec{r} = R\hat{\varpi}_A + (\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A$.
(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα του Σ είναι κάθετη στο νήμα.
(γ) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος σαν συνάρτηση της $\phi(t)$ και των παραγώγων της.
(δ) Βρείτε την στροφορμή ως προς το Ο.

---

5. Σώμα κινείται με ταχύτητα για την οποία οι αλγεβρικές τιμές των $\hat{\varpi}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ συνιστωσών σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι σε κάθε χρόνο ίσες μεταξύ τους.
(α) Δείξτε ότι η τροχιά είναι σπείρα πάνω σε κώνο.
(β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής ως προς την αρχή των συντεταγμένων είναι σταθερή βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο.
(γ) Αν η αρχική θέση είναι $\varpi_0\hat{x}$ με $\varpi_0 > 0$ και η αρχική ταχύτητα $v_0\dfrac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}$ ποιες είναι οι αρχικές τιμές των ϖ, ϕ, z, $\hat{\varpi}$, $\hat{\phi}$, $\dot{\varpi}$, $\dot{\phi}$, $\dot{z}$; Γράψτε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) συναρτήσει των ϖ_0, v_0 και του χρόνου.

Λύσεις – Εργασία #1

1. Οι μονάδες ισχύος (είναι ενέργεια ανά χρόνο, οπότε για να βρούμε τις μονάδες μπορούμε να σκεφτούμε έργο ανά χρόνο Fx/t με $F = ma$ ή κινητική ενέργεια ανά χρόνο mv^2/t) είναι J/s=kg m^2/s^3 στο σύστημα mksA ή γενικά $[M][L]^2/[T]^3$. Το βάρος είναι σε N = kg m/s^2, ή $[M][L]/[T]^2$, η επιφάνεια σε m^2, ή $[L]^2$ και η πυκνότητα σε kg /m^3, ή $[M]/[L]^3$. Άρα η σχέση $\mathcal{P} \propto W^a A^b \rho^c$ δίνει $\frac{[M][L]^2}{[T]^3} =$

$$\left(\frac{[M][L]}{[T]^2}\right)^{\alpha} \left([L]^2\right)^{\beta} \left(\frac{[M]}{[L]^3}\right)^{\gamma} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2 = \alpha + 2\beta - 3\gamma \text{ (από μήκη)}, \\ 1 = \alpha + \gamma \text{ (από μάζες)}, \\ -3 = -2\alpha \text{ (από χρόνους)}, \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = 3/2\,, \\ \beta = -1/2\,, \\ \gamma = -1/2\,. \end{matrix}\right. \text{ Άρα } \mathcal{P} \propto \sqrt{\frac{W^3}{A\rho}}.$$

Μια άμεση εκτίμηση της ισχύος μπορεί να γίνει ως ακολούθως:
Οι έλικες, μέσω της διαφοράς πίεσης που δημιουργούν, σπρώχνουν προς τα κάτω αέρα ασκώντας του δύναμη F. Η αντίδραση αυτής ασκείται στους έλικες και εξουδετερώνει το βάρος του ελικοπτέρου. Αν $u_1 = 0$ η ταχύτητα πάνω από τους έλικες και u_2 κάτω από αυτούς, η ταχύτητα του αέρα όταν περνά από τους έλικες είναι $u = (u_1 + u_2)/2 \Leftrightarrow u_2 = 2u$. Η μάζα που περνά σε χρόνο dt καταλαμβάνει κύλινδρο εμβαδού βάσης A και απειροστού ύψους $u\,dt$. Άρα έχει μάζα $dm = \rho A u\,dt$ και η ορμή του μεταβάλλεται κατά $dm\,(u_2 - u_1) = 2\rho A u^2 dt$. Η δύναμη είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, δηλ. $F = 2\rho A u^2$ και αφού ισούται με το βάρος είναι $W = 2\rho A u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{W}{2\rho A}}$. Η ισχύς της F είναι $\mathcal{P} = Fu = Wu = \sqrt{\frac{W^3}{2\rho A}}$.

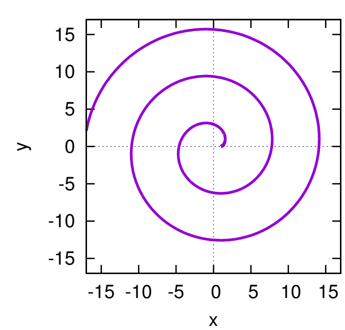
Το ίδιο προκύπτει και αν σκεφτούμε ότι το έργο της F γίνεται κινητική ενέργεια $dm\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = 2\rho A u^3\,dt$ οπότε $\mathcal{P} = 2\rho A u^3$ με $u = \sqrt{\frac{W}{2\rho A}}$.

2. (α) $c^2 = \vec{c}^{\,2} = (\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2+b^2-2ab\cos C$, δηλ. $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$.
(β) $\vec{c}\times\vec{a} = (\vec{a}-\vec{b})\times\vec{a} = \underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=0} - \underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{=-\vec{a}\times\vec{b}} = \vec{a}\times\vec{b}$, δηλ. $\vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}$.

Από την προηγούμενη $|\vec{c}\times\vec{a}| = |\vec{a}\times\vec{b}| \Leftrightarrow ca\sin B = ab\sin C \Leftrightarrow \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

3. (α) $\dot{x} = t\cos t$, $\dot{y} = t\sin t$, άρα $\vec{v} = t(\cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y})$ και $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\cos t - t\sin t)\hat{x} + (\sin t + t\cos t)\hat{y}$.
(β) Για $t = 0$ η ταχύτητα μηδενίζεται, άρα η επιτάχυνση θα μας δείξει προς τα που θα υπάρξει ταχύτητα. Με άλλα λόγια, για μικρούς χρόνους $\vec{r} \approx \vec{r}|_{t=0} + \vec{v}|_{t=0}t + \vec{a}|_{t=0}\frac{t^2}{2} = \hat{x} + \hat{x}\frac{t^2}{2}$, οπότε το σώμα αρχικά βρίσκεται στον άξονα x και αρχίζει να κινείται στην $\hat{x}$ φορά.
Το ίδιο βρίσκεται αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $x(t) = \cos t + t\sin t$, $y(t) = \sin t - t\cos t$. Για $t \ll 1$ είναι $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)$, $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$ οπότε $x = 1 + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$, $y = \mathcal{O}(t^3)$.

(γ) Είναι $|\vec{v}| = t$ και $\hat{\varepsilon} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$. Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται με τον χρόνο και το μοναδιαίο $\hat{\varepsilon}$ περιστρέφεται κατά την ορθή φορά (είναι περιοδική συνάρτηση και για να καταλάβουμε την κίνησή του αρκεί να το υπολογίσουμε σε κάποιες στιγμές που αντιστοιχούν σε υποπολλαπλάσια της περιόδου: $\hat{\varepsilon}|_{t=0} = \hat{x}$, $\hat{\varepsilon}|_{t=\pi/2} = \hat{y}$, $\hat{\varepsilon}|_{t=\pi} = -\hat{x}$, $\hat{\varepsilon}|_{t=3\pi/2} = -\hat{y}$, $\hat{\varepsilon}|_{t=2\pi} = \hat{x}$). Τα παραπάνω μας δείχνουν ότι η τροχιά είναι μια σπείρα που ανοίγει.



Η απόσταση από το κέντρο είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + t^2}$, αυξανόμενη με τον χρόνο.

(δ) Έχουμε βρει ήδη $\hat{\varepsilon} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$.
$\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}$, $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = t(-\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y})$, $\mathcal{R} = v^2/|\vec{a}_\kappa| = t$, $\hat{n} = \vec{a}_\kappa/|\vec{a}_\kappa| = -\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y}$.
Τα $\hat{n}$ και $\mathcal{R}$ θα μπορούσαν να βρεθούν μέσω της σχέσης $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\mathcal{R}}$. Είναι $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{|\vec{v}|\,dt} = \dfrac{1}{t}(-\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y})$, άρα $\dfrac{1}{\mathcal{R}} = \left|\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds}\right| = \dfrac{1}{t}$ και $\hat{n} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}/ds}{|d\hat{\varepsilon}/ds|} = -\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y}$.
(ε) $s = \displaystyle\int_0^t |\vec{v}|\,dt = t^2/2$.
(στ) Η γωνία λ μεταξύ $\vec{a}$ και $\vec{v}$ βρίσκεται από $\cos\lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Είναι οξεία (αφού $\cos\lambda > 0$ και η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι στο διάστημα $[0,\pi]$). Είναι $\tan\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\lambda}}{\cos\lambda} = t \Leftrightarrow \lambda = \arctan t$.
Η γωνία μεταξύ $\vec{r}$, $\vec{v}$ είναι $\arccos\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|\,|\vec{v}|} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \lambda = \arctan t$.
Η γωνία μεταξύ $\vec{a}$, $\vec{r}$ είναι $\arccos\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{|\vec{r}|\,|\vec{a}|} = \arccos\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 2\lambda$, αφού ισχύει $\cos(2\lambda) = 2\cos^2\lambda - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

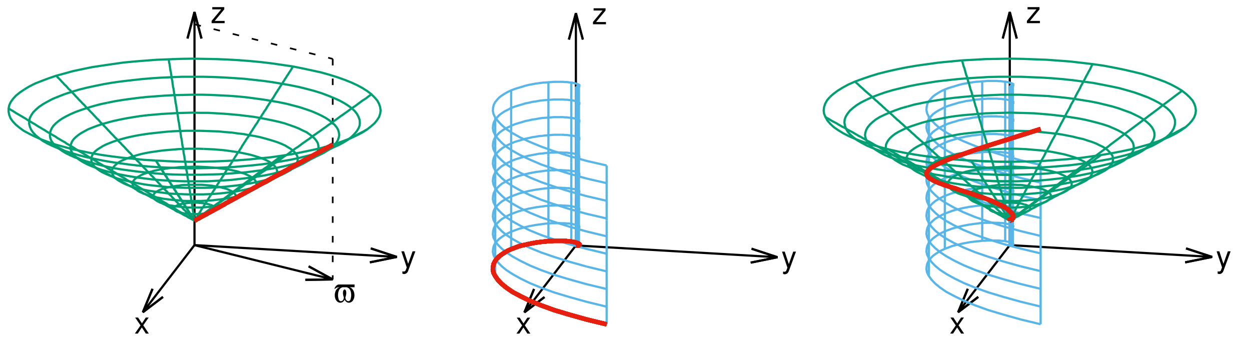
---

4. (α) Το διάνυσμα θέσης του Σ γράφεται σαν άθροισμα διανυσμάτων ΟΣ=ΟΑ+ΑΣ. Το ΟΑ είναι προφανώς ίσο με $R\hat{\varpi}_A$. Το ΑΣ έχει την φορά $\hat{\phi}_A$ και μέτρο $\ell_0 - R\phi$, διότι το ολικό μήκος του νήματος είναι ℓ_0 και το μήκος που έχει τυλιχθεί είναι μήκος τόξου σε κύκλο ακτίνας R που βαίνει σε γωνία ϕ, δηλ. είναι $R\phi$. Επομένως ΑΣ=$(\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A$.
(β) $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d}{dt}\left[R\hat{\varpi}_A + (\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A\right] = R\dot{\hat{\varpi}}_A - R\dot{\phi}\hat{\phi}_A + (\ell_0 - R\phi)\dot{\hat{\phi}}_A$. Αντικαθιστώντας $\dot{\hat{\varpi}}_A = \dot{\phi}\hat{\phi}_A$ και $\dot{\hat{\phi}}_A = -\dot{\phi}\hat{\varpi}_A$ προκύπτει $\vec{v} = -(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\varpi}_A$.
Η ταχύτητα είναι κάθετη στο νήμα ΑΣ (το οποίο έχει την διεύθυνση $\hat{\phi}_A$).
(γ) $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dfrac{d}{dt}\left[-(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\varpi}_A\right] = \left[R\dot{\phi}^2 - (\ell_0 - R\phi)\ddot{\phi}\right]\hat{\varpi}_A - (\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}\dot{\hat{\varpi}}_A$. Αντικαθιστώντας $\dot{\hat{\varpi}}_A = \dot{\phi}\hat{\phi}_A$ βρίσκουμε $\vec{a} = \left[R\dot{\phi}^2 - (\ell_0 - R\phi)\ddot{\phi}\right]\hat{\varpi}_A - (\ell_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi}_A$.
(δ) Η στροφορμή ως προς το Ο είναι $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\varpi}_A & \hat{\phi}_A & \hat{z} \\ R & \ell_0 - R\phi & 0 \\ -m(\ell_0 - R\phi)\dot{\phi} & 0 & 0 \end{vmatrix} = m(\ell_0 - R\phi)^2\dot{\phi}\hat{z}$.

---

5. (α) Ισχύει $\dot{\varpi} = \varpi\dot{\phi} = \dot{z}$.
Η πρώτη ισότητα $\dot{\varpi} = \varpi\dot{\phi}$ δίνει $d\varpi = \varpi d\phi \Leftrightarrow \displaystyle\int\frac{d\varpi}{\varpi} = \int d\phi \Leftrightarrow \ln\varpi = \phi + C_0 \Leftrightarrow \varpi = e^{C_0}e^{\phi}$, ή μετονομάζοντας την σταθερά $\varpi = Ce^{\phi}$. Η σχέση αυτή στις πολικές περιγράφει σπείρα, αφού όσο αυξάνεται η γωνία η απόσταση από τον άξονα επίσης αυξάνεται και ασυμπτωτικά απειρίζεται. (Η συγκεκριμένη σπείρα λέγεται λογαριθμική ή εκθετική.) Στις τρεις διαστάσεις περιγράφει επιφάνεια που δημιουργείται μεταφέροντας την σπείρα στην z κατεύθυνση.
Η δεύτερη ισότητα $\dot{z} = \dot{\varpi}$ δίνει $dz = d\varpi \Leftrightarrow z = D + \varpi$. Η σχέση αυτή σε κάθε ημιεπίπεδο $\phi =$ σταθερό περιγράφει ημιευθεία κλίσης 45° η οποία ξεκινά από το σημείο του άξονα με $z = D$ (μόνο τιμές $z \geq D$ είναι επιτρεπτές αφού $\varpi \geq 0$). Στις τρεις διαστάσεις περιγράφει τον κώνο ημιανοίγματος 45° που δημιουργείται αν περιστρέψουμε την παραπάνω ημιευθεία γύρω από τον άξονα z.
Η τομή των δύο προηγούμενων επιφανειών είναι σπείρα πάνω σε κώνο.
Στο αριστερό παρακάτω σχήμα φαίνεται η ημιευθεία (κόκκινη) στο ημιεπίπεδο $\phi =$ σταθερό (δηλ. το ημιεπίπεδο ϖz) και ο κώνος $z = D + \varpi$ που δημιουργεί η περιστροφή της γύρω από τον άξονα z. Φαίνεται μια περίπτωση με $D > 0$ στην οποία η κορυφή του κώνου βρίσκεται πάνω από το επίπεδο xy (για άλλες τιμές του D η κορυφή μετατοπίζεται πάνω στον άξονα z, στα αρνητικά αν $D < 0$ ή στην αρχή των αξόνων αν $D = 0$).

Στο μεσαίο σχήμα φαίνεται η σπείρα στο επίπεδο xy και η επιφάνεια $\varpi = Ce^{\phi}$ που δημιουργεί η μεταφορά της στην z κατεύθυνση.
Το δεξιά σχήμα δείχνει την τομή των δύο επιφανειών που είναι η τροχιά του σώματος.



(β) $L_z = m\varpi^2\dot{\phi}$, επομένως $\varpi^2\dot{\phi} = \ell =$ σταθερά. Αντικαθιστώντας την $\varpi = Ce^{\phi}$ έχουμε $C^2e^{2\phi}d\phi = \ell\, dt$ και ολοκληρώνοντας προκύπτει $\dfrac{1}{2}C^2e^{2\phi} = \ell t + C_0 \Leftrightarrow \phi = \ln\dfrac{\sqrt{2\ell t + 2C_0}}{C}$. Οι άλλες δύο κυλινδρικές συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου είναι $\varpi = Ce^{\phi} = \sqrt{2\ell t + 2C_0}$ και $z = D + \varpi = D + \sqrt{2\ell t + 2C_0}$.
(γ) Για $t = 0$ η αρχική θέση είναι $\vec{r} = \varpi_0\hat{x}$, δηλ. στον θετικό ημιάξονα $\hat{x}$. Επομένως $\varpi = \varpi_0$ (απόσταση από τον άξονα z), $\phi = 0$ (γωνία από τον θετικό ημιάξονα μέχρι το διάνυσμα θέσης) και $z = 0$.
Για $\phi = 0$ είναι $\hat{\varpi} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} = \hat{x}$, $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} = \hat{y}$.
Η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$. Αντικαθιστώντας την δοσμένη αρχική ταχύτητα και τις αρχικές τιμές των μοναδιαίων στις κυλινδρικές έχουμε $v_0\dfrac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}} = \dot{\varpi}\hat{x} + \varpi\dot{\phi}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$, οπότε $\dot{\varpi} = \varpi\dot{\phi} = \dot{z} = \dfrac{v_0}{\sqrt{3}}$.
Συνοψίζοντας, για $t = 0$ ξέρουμε ότι $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = \dfrac{v_0}{\sqrt{3}}$, $\varpi\dot{\phi} = \dfrac{v_0}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \dfrac{v_0/\varpi_0}{\sqrt{3}}$, $\dot{z} = \dfrac{v_0}{\sqrt{3}}$.
Αυτές οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν τις σταθερές ολοκλήρωσης των συναρτήσεων $\varpi = \sqrt{2\ell t + 2C_0}$, $\phi = \ln\dfrac{\sqrt{2\ell t + 2C_0}}{C}$, $z = D + \sqrt{2\ell t + 2C_0}$. Θέτοντας $t = 0$ στις συναρτήσεις αυτές και στις παραγώγους τους $\dot{\varpi} = \dfrac{\ell}{\varpi}$, $\dot{\phi} = \dfrac{\ell}{\varpi^2}$, $\dot{z} = \dfrac{\ell}{\varpi}$, βρίσκουμε $\varpi_0 = \sqrt{2C_0}$, $\sqrt{2C_0} = C$, $D = -\sqrt{2C_0}$, $\dfrac{v_0}{\sqrt{3}} = \dfrac{\ell}{\varpi_0}$, $\dfrac{v_0/\varpi_0}{\sqrt{3}} = \dfrac{\ell}{\varpi_0^2}$, $\dfrac{v_0/\varpi_0}{\sqrt{3}} = \dfrac{\ell}{\varpi}$, δηλ. $C_0 = \varpi_0^2/2$, $C = \varpi_0$, $D = -\varpi_0$, $\ell = \dfrac{\varpi_0 v_0}{\sqrt{3}}$.
Τελικά η θέση σε κάθε χρόνο καθορίζεται από τις $\varpi = \varpi_0\sqrt{1 + \dfrac{2v_0 t}{\varpi_0\sqrt{3}}}$, $\phi = \ln\dfrac{\varpi}{\varpi_0}$, $z = \varpi - \varpi_0$.