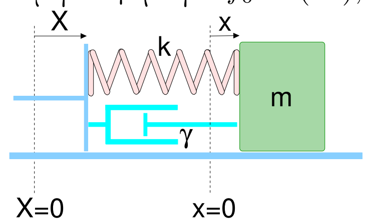
Μηχανική Ι – Εργασία #7

Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

1. Μάζα $m = 0.4$ kg ταλαντώνεται συνδεδεμένη στο δεξιό άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 1.6$ N/m. Στην κίνηση επιδρά και αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας του σώματος ως προς το αριστερό άκρο, $2m\gamma v_\sigma$ με $\gamma = 0.6$ s^{-1}.
(α) Έστω το αριστερό άκρο του ελατηρίου είναι ακίνητο.
(α_1) Ποια η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας;
(α_2) Ποια η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης της μάζας;
(α_3) Ποιος ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών (δηλ. μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση);
(β) Έστω ότι κινούμε το αριστερό άκρο του ελατηρίου με τρόπο ώστε η ταλάντωση στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς να είναι εξαναγκασμένη με δύναμη διεγέρτη $mf_0 \sin(\omega t)$, όπου $f_0 = 1$ m s^{-2} και $\omega > 0$.



(β_1) Πως κινούμε το αριστερό άκρο του ελατηρίου, δηλ, ποια η θέση του $X(t)$; Θεωρήστε ότι αρχικά είναι ακίνητο, δηλ. $X(t=0) = 0$, $\dot{X}(t=0) = 0$.
(β_2) Μετά τη μεταβατική φάση, το σώμα καταλήγει να εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση. Συναρτήσει του ω βρείτε την θέση $x(t)$, το πλάτος της θέσης, το πλάτος της ταχύτητας, το μέγιστο της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης $kx^2/2$ και το μέγιστο της κινητικής ενέργειας του σώματος.
(β_3) Για ποια κυκλική συχνότητα ω η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης αποκτά (κάποιες χρονικές στιγμές) τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή; Πόση είναι αυτή η μέγιστη τιμή;
(β_4) Για ποια κυκλική συχνότητα ω η κινητική ενέργεια του σώματος αποκτά (κάποιες χρονικές στιγμές) τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή; Πόση είναι αυτή η μέγιστη τιμή;
(β_5) Για ποια κυκλική συχνότητα ω η δύναμη του διεγέρτη είναι σε φάση με την ταχύτητα του σώματος;
(β_6) Ποια η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου;
(β_7) Αν θέλαμε να μελετήσουμε την κίνηση στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αρχή την θέση φυσικού μήκους του, ποια θα ήταν η εξίσωση κίνησης του σώματος;

Λύσεις – Εργασία #7

1. Όλες οι παρακάτω πράξεις και τα αποτελέσματα είναι στο διεθνές σύστημα μονάδων.
(α$_1$) $m\ddot{x} = -2m\gamma\dot{x} - kx \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2$, ή $\ddot{x} + 1.2\dot{x} + 4x = 0$.
(α$_2$) Οι λύσεις είναι ανάλογες του $e^{\lambda t}$ με $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, άρα η κίνηση είναι φθίνουσα ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 1.91$ και περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = 3.29$.
(α$_3$) Το πλάτος είναι ανάλογο του $e^{-\gamma t}$, επομένως ο λόγος των δύο διαδοχικών πλατών είναι $e^{0.6T} = 7.20$.
Η λύση είναι $x = De^{-\gamma t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\ t + \phi_0)$, όπου $D > 0$ και ϕ_0 σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Οι μηδενισμοί της ταχύτητας απέχουν μεταξύ τους χρονικό διάστημα $\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, διότι $v = De^{-\gamma t}\left[-\gamma\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\ t + \phi_0) + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\ t + \phi_0)\right]$. Συγκεκριμένα, αν $\gamma = \omega_0\cos\mu$, όπου $\mu \in (0, \pi/2)$, η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\ t + \phi_0 - \mu) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{n\pi + \mu - \phi_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ για ακέραια n. Άρτια και περιττά n δίνουν θετικές και αρνητικές ακραίες απομακρύνσεις, αντίστοιχα.
(β$_1$) Τώρα η δύναμη αντίστασης είναι $-2m\gamma(\dot{x} - \dot{X})\hat{x}$ και η δύναμη ελατηρίου είναι $-m\omega_0^2(x - X)\hat{x}$, άρα η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = -2m\gamma(\dot{x} - \dot{X}) - m\omega_0^2(x - X) \Leftrightarrow m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = 2m\gamma\dot{X} + m\omega_0^2 X$. Το δεξιό μέλος δίνεται ότι είναι ίσο με $mf_0\sin(\omega t)$ με $f_0 = 1$, οπότε ισχύει $2\gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = f_0\sin(\omega t)$ με $f_0 = 1$. Η λύση βρίσκεται εύκολα με χρήση μιγαδικής ανάλυσης. Αν ο μιγαδικός z ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $2\gamma\dot{\mathrm{z}} + \omega_0^2\mathrm{z} = f_0 e^{i\omega t}$ τότε το φανταστικό του μέρος είναι η X, δηλ. $X = \Im\mathrm{z}$. Η λύση της ομογενούς είναι $C_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}t}$ και η μερική λύση είναι της μορφής $\mathrm{z} = Ce^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $C = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega} = \dfrac{f_0(\omega_0^2 - 2i\gamma\omega)}{\omega_0^4 + (2\gamma\omega)^2}$, δηλ. η γενική λύση είναι $\mathrm{z} = C_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}t} + \dfrac{f_0(\omega_0^2 - 2i\gamma\omega)}{\omega_0^4 + (2\gamma\omega)^2}e^{i\omega t}$.
Παίρνοντας το φανταστικό μέρος βρίσκουμε $X(t) = \Im C_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}t} + \dfrac{\omega_0^2 f_0\sin(\omega t) - 2\gamma\omega f_0\cos(\omega t)}{\omega_0^4 + (2\gamma\omega)^2}$.
Αφού για $t = 0$ μηδενίζονται τα X και $\dot{X}$ η σταθερά είναι $\Im C_0 = \dfrac{2\gamma\omega f_0}{\omega_0^4 + (2\gamma\omega)^2}$. Επομένως το αριστερό άκρο το κινούμε ώστε $X(t) = \dfrac{2\gamma\omega f_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}t} - 2\gamma\omega f_0\cos(\omega t) + \omega_0^2 f_0\sin(\omega t)}{\omega_0^4 + (2\gamma\omega)^2}$.
(β$_2$) Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\sin(\omega t)$ με $f_0 = 1$.
Το σώμα θα καταλήξει να ακολουθεί τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (αφού το πλάτος της λύσης της ομογενούς μειώνεται εκθετικά). Η μερική λύση βρίσκεται εύκολα με χρήση μιγαδικής ανάλυσης. Αν ο μιγαδικός z ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\ddot{\mathrm{z}} + 2\gamma\dot{\mathrm{z}} + \omega_0^2\mathrm{z} = f_0 e^{i\omega t}$ τότε το φανταστικό του μέρος είναι η συντεταγμένη x, δηλ. $x = \Im\mathrm{z}$. Η μερική λύση είναι προφανώς της μορφής $\mathrm{z} = De^{i\omega t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $D = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$. Ο παρονομαστής γράφεται $\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\ e^{i\phi}$, όπου $\phi = \arccos\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \in (0, \pi)$ (διότι το φανταστικό μέρος είναι θετικό), επομένως το μιγαδικό πλάτος γράφεται $D = |D|e^{-i\phi}$ όπου $|D| = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$ και η λύση $\mathrm{z} = |D|e^{i(\omega t - \phi)}$.
Το φανταστικό της μέρος είναι $x = |D|\sin(\omega t - \phi)$.
Η λύση γράφεται και σαν $x = \Im\mathrm{z} = \Im\dfrac{f_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \dfrac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - 2f_0\gamma\omega\cos(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$.

Το πλάτος της θέσης είναι $|D| = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$.

Η ταχύτητα είναι $v = \dot{x} = \omega|D|\cos(\omega t-\phi)$, άρα το πλάτος της είναι $\omega|D| = \dfrac{f_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $\dfrac{m\omega_0^2x^2}{2} = \dfrac{m\omega_0^2|D|^2}{2}\sin^2(\omega t-\phi)$ και το μέγιστό της $\dfrac{m\omega_0^2|D|^2}{2}$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\omega^2|D|^2}{2}\cos^2(\omega t-\phi)$ και το μέγιστό της $\dfrac{m\omega^2|D|^2}{2}$.

(β$_3$) Πρέπει το πλάτος της ταλάντωσης να είναι μέγιστο (συντονισμός). Είναι $\dfrac{d\ln|D|}{d(\omega^2)} = \dfrac{\omega_0^2-2\gamma^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$. Ισχύει $\omega_0^2-2\gamma^2>0$ επομένως η $|D|$ είναι αύξουσα συνάρτηση του ω μέχρι την τιμή $\omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$ και στη συνέχεια φθίνουσα. Το πλάτος γίνεται μέγιστο για $\omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$ και $|D|_{\max} = \dfrac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$.

Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι $\dfrac{m\omega_0^2}{2}|D|^2_{\max} = \dfrac{m\omega_0^2f_0^2}{8\gamma^2(\omega_0^2-\gamma^2)}$.

Αριθμητική εφαρμογή ($m=0.4,\ \omega_0=2,\ \gamma=0.6,\ f_0=1$): Για $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}=1.81$ το πλάτος ταλάντωσης μεγιστοποιείται και γίνεται $|D|_{\max} = \dfrac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} = 0.44$. Το μέγιστο της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι $\dfrac{m\omega_0^2}{2}|D|^2_{\max} = 0.15$.

(β$_4$) Πρέπει το πλάτος της ταχύτητας να γίνει μέγιστο. Είναι $\dfrac{d\ln(\omega|D|)}{d(\ln\omega)} = 1+2\omega^2\dfrac{\omega_0^2-2\gamma^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \dfrac{\omega_0^4-\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$. Επομένως η $\omega|D|$ είναι αύξουσα συνάρτηση του ω μέχρι την τιμή $\omega=\omega_0$ και στη συνέχεια φθίνουσα. Το πλάτος της ταχύτητας γίνεται μέγιστο για $\omega=\omega_0$ και $(\omega|D|)_{\max} = \dfrac{f_0}{2\gamma}$.

Η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι $\dfrac{m}{2}(\omega|D|)^2_{\max} = \dfrac{mf_0^2}{8\gamma^2}$.

Αριθμητική εφαρμογή: Για $\omega=\omega_0$ το πλάτος της ταχύτητας μεγιστοποιείται και γίνεται $(\omega|D|)_{\max} = \dfrac{f_0}{2\gamma} = 0.83$. Το μέγιστο της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι $\dfrac{m}{2}(\omega|D|)^2_{\max} = \dfrac{mf_0^2}{8\gamma^2} = 0.14$.

(β$_5$) Η δύναμη του διεγέρτη $mf_0\sin(\omega t)$ και η ταχύτητα $v=\omega|D|\cos(\omega t-\phi)=\omega|D|\sin(\omega t-\phi+\pi/2)$ είναι σε φάση αν $\phi=\pi/2$ (η γωνία $\phi\in(0,\pi)$ επομένως δεν υπάρχει άλλη λύση).

Αφού $\phi = \arccos\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$ αυτό υλοποιείται αν $\omega=\omega_0$.

(β$_6$) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $\dfrac{m\omega_0^2(x-X)^2}{2}$.

(β$_7$) Στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα έπρεπε να προσθέσουμε την υποθετική δύναμη $-m\ddot{X}\hat{x}$. Αν x_σ είναι η απομάκρυνση από την θέση φυσικού μήκους τότε η δύναμη αντίστασης είναι $-2m\gamma\dot{x}_\sigma\hat{x}$ και η δύναμη ελατηρίου είναι $-m\omega_0^2x_\sigma\hat{x}$, άρα η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x}_\sigma = -m\ddot{X}-2m\gamma\dot{x}_\sigma-m\omega_0^2x_\sigma \Leftrightarrow m\ddot{x}_\sigma+2m\gamma\dot{x}_\sigma+m\omega_0^2x_\sigma = -m\ddot{X}$.

Η λύση της είναι $x_\sigma = x-X$. Σε μεγάλους χρόνους είναι $x_\sigma = \dfrac{f_0(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t)-2f_0\gamma\omega\cos(\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2} - \dfrac{f_0\omega_0^2\sin(\omega t)-2\gamma\omega f_0\cos(\omega t)}{\omega_0^4+(2\gamma\omega)^2}$.