Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

1. Έστω οι αέριες μάζες ενός κυκλώνα κινούνται κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από το βαρομετρικό χαμηλό, σε τόπο γεωγραφικού πλάτους $\lambda = 30^\circ$. Η ταχύτητα κάθε μάζας ικανοποιεί την εξίσωση Νεύτωνα $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -f\hat{z} \times \vec{v} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{d\varpi}\hat{\varpi}$, όπου $\rho = 1.15$ kg m^{-3} η πυκνότητα του αέρα (η οποία θεωρείται σταθερή), $P = P_c + (P_\infty - P_c)e^{-A/\varpi^B}$ η πίεση σαν συνάρτηση της απόστασης, με $P_c = 950$ mb την πίεση στο κέντρο (1 mb=100 N m^{-2}), $P_\infty = 1005$ mb την πίεση σε μεγάλες αποστάσεις, $B = 1.5$ και $A = (36 \text{ km})^B$.
(α) Γνωρίζοντας ότι ο όρος $-f\hat{z} \times \vec{v}$ οφείλεται στην επιτάχυνση Coriolis, βρείτε τη σχέση του «παράγοντα Coriolis» f με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης και το γεωγραφικό πλάτος.
(β) Έστω κάθε αέρια μάζα περιστρέφεται κυκλικά σε ακτίνα ϖ από το κέντρο.
(β$_1$) Βρείτε την ταχύτητα σαν συνάρτηση του ϖ.
(β$_2$) Θεωρώντας ασήμαντη την επίδραση της επιτάχυνσης Coriolis βρείτε σε ποια απόσταση η ταχύτητα είναι μέγιστη και ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή. Επαληθεύστε ότι πράγματι η επίδραση της επιτάχυνσης Coriolis είναι ασήμαντη στην απόσταση αυτή.
(β$_3$) Ποια η ακτίνα του ματιού του κυκλώνα, δηλ. της περιοχής κοντά στο κέντρο όπου η ταχύτητα είναι πρακτικά μηδενική;
(γ) Δείξτε ότι για την γενική σπειροειδή κίνηση των αερίων μαζών στο οριζόντιο επίπεδο ισχύουν οι διατηρήσεις «στροφορμής» ανά μάζα $\varpi v_\phi + \dfrac{\varpi^2 f}{2} =$ σταθερά και ενέργειας ανά μάζα $\dfrac{v_\varpi^2}{2} + \dfrac{v_\phi^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} =$ σταθερά.

---

2. Από σημείο της επιφάνειας της Γης πετάμε σώμα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0. Δείξτε ότι αν θέλουμε το σώμα να επιστρέψει στον ίδιο σημείο πέφτοντας, θα πρέπει να του δώσουμε και μια μικρή αρχική ταχύτητα προς την ανατολή, ίση με $\dfrac{2\omega v_0^2 \cos\lambda}{3g}$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης και λ το γεωγραφικό πλάτος. (Αγνοήστε όρους ανάλογους του ω^2.)

Λύσεις – Εργασία #6

1. (α) Το μέρος της Coriolis επιτάχυνσης $-2\vec{\omega}\times\vec{v}$ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο είναι $-2\vec{\omega}_\perp\times\vec{v}$ όπου $\vec{\omega}_\perp$ η κατακόρυφη προβολή της $\vec{\omega}$, άρα $f\hat{z}=2\vec{\omega}_\perp \Leftrightarrow f=2\omega_\perp=2\omega\sin\lambda$.
(β$_1$) Η δύναμη ανά μάζα λόγω πίεσης είναι $-F_P\hat{\varpi}$ όπου $F_P=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{d\varpi}=\dfrac{AB(P_\infty-P_c)}{\rho\varpi^{B+1}}e^{-A/\varpi^B}$ και έχει φορά προς το κέντρο.
Ο μηχανισμός δημιουργίας των κυκλώνων σχετίζεται με την επιτάχυνση Coriolis, λόγω της οποία οι αέριες μάζες που κινούνται προς το βαρομετρικό χαμηλό αποκτούν περιστροφική ταχύτητα με φορά $-f\hat{z}\times(-\hat{\varpi})$. Άρα η φορά περιστροφικής κίνησης στον κυκλώνα είναι $\vec{v}\parallel\hat{\phi}$, οπότε η Coriolis έχει φορά προς τα έξω και η εξίσωση Νεύτωνα δίνει για την κεντρομόλο επιτάχυνση $\dfrac{v^2}{\varpi}=F_P-fv$. Η θετική λύση του τριωνύμου είναι $v=-\dfrac{f\varpi}{2}+\sqrt{\dfrac{f^2\varpi^2}{4}+F_P\varpi}$.
(β$_2$) Αγνοώντας τον όρο Coriolis είναι $v=\sqrt{F_P\varpi}=\sqrt{\dfrac{AB(P_\infty-P_c)}{\rho\varpi^B}e^{-A/\varpi^B}}$ και $\dfrac{d\ln v^2}{d(1/\varpi^B)}=\varpi^B-A$, επομένως στην ακτίνα $R=A^{1/B}$ η ταχύτητα έχει την μέγιστη τιμή, η οποία είναι $v_{\max}=\sqrt{\dfrac{B(P_\infty-P_c)}{e\rho}}$.
Οι αριθμητικές τιμές είναι $R=36$ km, $v_{\max}=51.4$ m s$^{-1}=185$ km/h.
Ο λόγος της Coriolis προς την F_P είναι $\dfrac{fv_{\max}}{F_P}=\dfrac{fv_{\max}}{v_{\max}^2/R}=\dfrac{2\omega R\sin\lambda}{v_{\max}}=0.05$, επομένως πράγματι η Coriolis είναι ασήμαντη.
(β$_3$) Η F_P μηδενίζεται, άρα και η ταχύτητα, όταν το εκθετικό e^{-A/ϖ^B} πρακτικά μηδενίζεται, κάτι που συμβαίνει στην απόσταση όπου $\dfrac{A}{\varpi^B}\approx 5\Leftrightarrow\varpi=\left(\dfrac{A}{5}\right)^{1/B}=\dfrac{36\text{ km}}{5^{2/3}}=12.3$ km.
(γ) Η θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση σε πολικές γράφονται $\vec{r}=\varpi\hat{\varpi}$, $\vec{v}=\dot{\varpi}\hat{\varpi}+\varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a}=(\ddot{\varpi}-\varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi}+\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi}$. Άρα ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $(\ddot{\varpi}-\varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi}+\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi}=-f\hat{z}\times(\dot{\varpi}\hat{\varpi}+\varpi\dot{\phi}\hat{\phi})-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{d\varpi}\hat{\varpi}$ και έχει συνιστώσες $\ddot{\varpi}-\varpi\dot{\phi}^2=f\varpi\dot{\phi}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{d\varpi}$ και $\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})=-f\dot{\varpi}$.
Η δεύτερη γράφεται $\dfrac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\phi}+\dfrac{\varpi^2 f}{2}\right)=0$ και δίνει την διατήρηση «στροφορμής» ανά μάζα $\varpi v_\phi+\dfrac{\varpi^2 f}{2}=L=$ σταθερά.
Αντικαθιστώντας $\dot{\phi}=\dfrac{v_\phi}{\varpi}=\dfrac{L}{\varpi^2}-\dfrac{f}{2}$ στην πρώτη αυτή γράφεται $\ddot{\varpi}=F_{\text{eff}}$ με $F_{\text{eff}}=\dfrac{L^2}{\varpi^3}-\dfrac{f^2\varpi}{4}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{d\varpi}$, δηλ. η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάσταση. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\dfrac{\dot{\varpi}^2}{2}+V_{\text{eff}}=$ σταθερά, όπου $V_{\text{eff}}=-\displaystyle\int F_{\text{eff}}\,d\varpi=\dfrac{L^2}{2\varpi^2}+\dfrac{f^2\varpi^2}{8}+\dfrac{P}{\rho}+$ σταθερά $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{\varpi}-\dfrac{f\varpi}{2}\right)^2+\dfrac{P}{\rho}+$ σταθερά $=\dfrac{v_\phi^2}{2}+\dfrac{P}{\rho}+$ σταθερά. Άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\dfrac{v_\varpi^2}{2}+\dfrac{v_\phi^2}{2}+\dfrac{P}{\rho}=E=$ σταθερά.
Το ολοκλήρωμα αυτό βρίσκεται και άμεσα από την εξίσωση Νεύτωνα, αν σκεφτούμε ότι η δύναμη λόγω πίεσης είναι συντηρητική με αντίστοιχο δυναμικό $\dfrac{P}{\rho}$ (η δύναμη γράφεται $-\vec{\nabla}\dfrac{P}{\rho}$), ενώ η Coriolis είναι κάθετη στην κίνηση και άρα δεν παράγει έργο. Επομένως η διατήρηση ενέργειας ανά μάζα είναι $\dfrac{v^2}{2}+\dfrac{P}{\rho}=$ σταθερά.
Ένας άλλος τρόπος να βρούμε το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι να πολλαπλασιάσουμε τον νόμο Νεύτωνα με

την ταχύτητα, δηλ. $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \left(-f\,\hat{z} \times \vec{v} - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\varpi}\hat{\varpi} \right) \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = 0 - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\varpi}\dot{\varpi} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) = 0.$

---

2. Όπως στην λύση της 1ης άσκησης από την 6η εργασία Μηχανικής Ι 2016-2017 καταλήγουμε στις σχέσεις (4), (5), (6) της λύσης εκείνης, με $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $v_{0x} = 0$, $v_{0y} \neq 0$, $v_{0z} = v_0$, δηλ. στις

$$\begin{aligned} x &= v_{0y}\omega t^2 \sin\lambda\,, \\ y &= v_{0y}t - v_0\omega t^2\cos\lambda + \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda\,, \\ z &= v_0 t - \frac{1}{2}g t^2 + v_{0y}\omega t^2 \cos\lambda\,. \end{aligned}$$

Από την δεύτερη προκύπτει ότι αν θέλουμε να μηδενιστεί το y πρέπει η v_{0y} να είναι ανάλογη της ω, οπότε τα γινόμενα ωv_{0y} είναι ανάλογα του ω^2 και άρα αμελητέα. Έτσι οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται στις

$$\begin{aligned} x &= 0\,, \\ y &= v_{0y}t - v_0\omega t^2\cos\lambda + \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda\,, \\ z &= v_0 t - \frac{1}{2}g t^2\,. \end{aligned}$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι το σώμα επιστρέφει στην επιφάνεια της Γης $z = 0$ μετά από χρόνο $T = \frac{2v_0}{g}$. Απαιτώντας στον χρόνο αυτό να είναι και $y = 0$, βρίσκουμε $v_{0y} = v_0\omega T\cos\lambda - \frac{1}{3}\omega g T^2\cos\lambda = \frac{2\omega v_0^2\cos\lambda}{3g}$.
