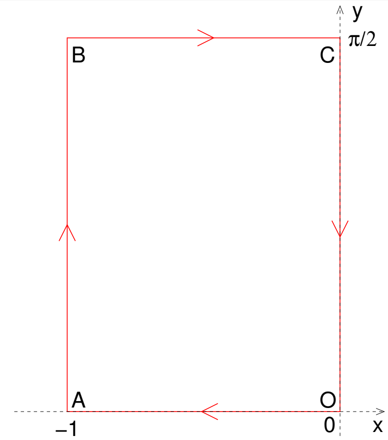
Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

1. Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = -g'(x)\cos y\,\hat{x} + \lambda\, g(x)\sin y\,\hat{y}$, όπου $\lambda =$ σταθερά και $g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$ (σε κατάλληλες μονάδες).



(α) Υπολογίστε πόση ενέργεια καταναλώνουμε για να μετακινήσουμε ένα σώμα στο παραπάνω πεδίο, στην κλειστή διαδρομή του σχήματος $O(0,0,0) \to A(-1,0,0) \to B(-1,\pi/2,0) \to C(0,\pi/2,0) \to O(0,0,0)$. (Αρχικά το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων και τελικά το αφήνουμε στην αρχή των αξόνων.)
(β) Από το αποτέλεσμα του (α) μπορείτε να κρίνετε για ποια τιμή του λ ίσως το πεδίο είναι συντηρητικό;
Δείξτε ότι πράγματι είναι συντηρητικό για αυτό το λ και βρείτε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας.
(γ) Σώμα μάζας $m = 1$ βρίσκεται στο πεδίο αυτό. Αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ με $v_0 > 0$.
(γ_1) Αιτιολογήστε γιατί το σώμα θα κινείται μονοδιάστατα (πάνω στον άξονα x).
(γ_2) Περιγράψτε την κίνηση του m ανάλογα με την τιμή της αρχικής ταχύτητας.
Αν η κίνηση είναι ταλάντωση γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει την περίοδο.
(δ) Σχεδιάστε τις καμπύλες στο διάγραμμα φάσης για τις πιθανές κινήσεις σώματος m πάνω στον άξονα x.
(ε) Έστω το m βάλλεται την στιγμή $t = 0$ από το σημείο O με ταχύτητα $\vec{v}_0 = e\hat{x}$. Μετά από χρόνο τ βάλλεται δεύτερο σώμα ίδιας μάζας από το σημείο O με ίδια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = e\hat{x}$. Αν τα σώματα συναντώνται στη θέση $x = 1/2$ ποια η χρονική διαφορά τ;

---

2. Το σημειακό σώμα ιδανικού εκκρεμούς βάλλεται οριζόντια από την κατώτερη θέση με ταχύτητα v_i. Όταν διανύσει αμβλεία γωνία ϕ_0 με $\cos\phi_0 = -\sqrt{1/3}$, $\sin\phi_0 = \sqrt{2/3}$, το νήμα χαλαρώνει.
(α) Ποια η ταχύτητα στο σημείο χαλάρωσης; (Η ακτίνα του εκκρεμούς R και η επιτάχυνση βαρύτητας g θεωρούνται γνωστά.)
(β) Ποια η αρχική ταχύτητα v_i;
(γ) Τι τροχιά ακολουθεί το σώμα όσο το νήμα είναι χαλαρό; Δείξτε ότι θα χτυπήσει στο σημείο στήριξης του νήματος.

---

3. Σώμα μάζας $m = 1$ και φορτίου $q = 1$ κινείται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \cos x\,\hat{z}$ (σε κατάλληλες μονάδες). Αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $\vec{r}|_{t=0} = 0$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}|_{t=0} = v_0\hat{x}$.
(α) Ολοκληρώνοντας τις συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{v}\times\vec{B}$ δείξτε ότι:
(α_1) η κίνηση γίνεται στο επίπεδο $z = 0$,
(α_2) η v_y είναι συνάρτηση του x την οποία και να βρείτε,
(α_3) η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη, δηλ. σε $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E$ με κάποια «δυναμική ενέργεια» $V(x)$ την οποία να βρείτε.
(β) Αν $v_0 = 1$ βρείτε: (β_1) την $x(t)$, (β_2) την $y(t)$, (β_3) τη τροχιά του σώματος.
(γ) Περιγράψτε την κίνηση στην x κατεύθυνση αν η αρχική ταχύτητα είναι $v_0 = 1 \pm \epsilon$, όπου ϵ πολύ μικρός θετικός αριθμός.
Δίνεται $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\cos x} = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Λύσεις – Εργασία #5

1. (α) Στην διαδρομή OA είναι $x = 0 \to -1$, $y = z = 0$, $d\vec{r} = dx\ \hat{x}$, $\vec{F} = -g'(x)\ \hat{x}$, άρα $W_{OA} = -\int_0^{-1} g'(x)\ dx = -\left[g(x)\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2e^2}$.

Στην διαδρομή AB είναι $x = -1$, $y = 0 \to \pi/2$, $z = 0$, $d\vec{r} = dy\ \hat{y}$, $\vec{F} = \frac{\lambda}{2e^2}\sin y\ \hat{y}$, άρα $W_{AB} = \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda}{2e^2}\sin y\ dy = \frac{\lambda}{2e^2}\left[-\cos y\right]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2e^2}$.

Στην διαδρομή BC είναι $x = -1 \to 0$, $y = \pi/2$, $z = 0$, $d\vec{r} = dx\ \hat{x}$, $\vec{F} = \lambda\, g(x)\ \hat{y}$, άρα $W_{BC} = 0$.

Στην διαδρομή CO είναι $x = 0$, $y = \pi/2 \to 0$, $z = 0$, $d\vec{r} = dy\ \hat{y}$, $\vec{F} = 0$, άρα $W_{CO} = 0$.

Από Θ.Μ.Κ.Ε. η ενέργεια που καταναλώνουμε είναι αντίθετη του έργου της δύναμης $\vec{F}$, δηλ. είναι $\frac{1-\lambda}{2e^2}$.

(β) Αναγκαία (όχι ικανή) συνθήκη για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική είναι το έργο της στην κλειστή διαδρομή $O \to A \to B \to C \to O$ να είναι μηδενικό, δηλ. $\lambda = 1$.

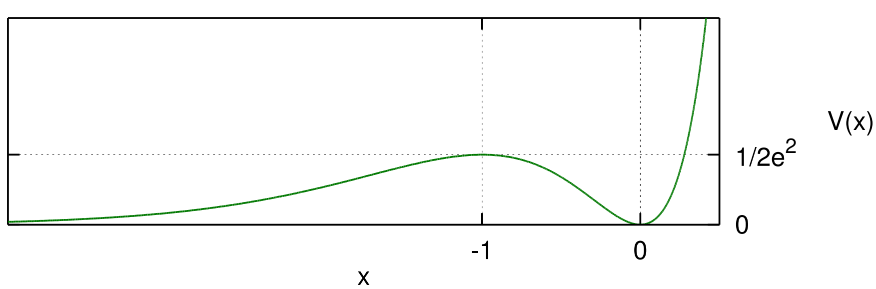
Για $\lambda = 1$ η δύναμη είναι πράγματι συντηρητική αν υπάρχει συνάρτηση $V(x.y.z)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, δηλ. αν $\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)\cos y$, $\frac{\partial V}{\partial y} = -g(x)\sin y$ και $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$.

Η τελευταία δίνει $V = V(x, y)$, οπότε η πρώτη δίνει $V = g(x)\cos y + C(y)$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη έχουμε $C'(y) = 0$, δηλ. $C =$ αυθαίρετη προσθετική σταθερά, την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε μηδενική. Άρα για $\lambda = 1$ η δύναμη είναι συντηρητική και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V = g(x)\cos y$.

(γ_1) Η δύναμη αρχικά είναι μηδενική. Λόγω της αρχικής ταχύτητας μετά από μικρό χρονικό διάστημα Δt το σώμα θα βρεθεί στο σημείο $v_0\Delta t\hat{x}$. Στο σημείο αυτό η δύναμη είναι στην $\hat{x}$ διεύθυνση, επομένως η ταχύτητα θα αλλάξει, αλλά θα παραμείνει στην $\hat{x}$ διεύθυνση. Το ίδιο θα συνεχιστεί στα επόμενα χρονικά διαστήματα, επομένως το σώμα θα κινείται στον άξονα x και συνεχώς η δύναμη που θα δέχεται θα έχει μηδενικές $\hat{y}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες.

(γ_2) Η κίνηση είναι μονοδιάσταση στον άξονα x και η δύναμη είναι $\vec{F} = -g'(x)\ \hat{x}$. Η περιγραφή της κίνησης μπορεί να γίνει μελετώντας γραφικά την δυναμική ενέργεια, η οποία είναι $V(x) = g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Είναι $V'(x) = x(x+1)e^{2x}$, επομένως η $V(x)$ είναι αύξουσα από το $x = -\infty$ ως το $x = -1$ όπου μεταβάλλεται από $\lim_{x\to-\infty} V(x) = 0$ σε $V(-1) = \frac{1}{2e^2}$, φθίνουσα από το $x = -1$ ως το $x = 0$ όπου μεταβάλλεται από $V(-1) = \frac{1}{2e^2}$ σε $V(0) = 0$ και αύξουσα από το $x = 0$ ως το $x = +\infty$ όπου μεταβάλλεται από $V(0) = 0$ σε $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$.



Το σώμα έχει ενέργεια $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(0) = \frac{v_0^2}{2}$ και έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

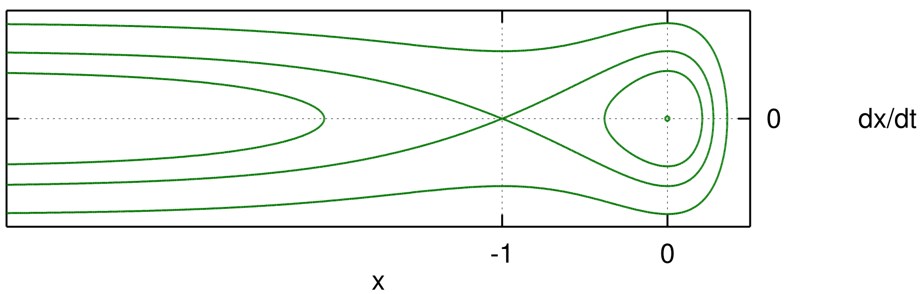
- $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = 0$: Το σώμα παραμένει ακίνητο στο $x = 0$.
- $0 < E < \frac{1}{2e^2} \Leftrightarrow 0 < v_0 < \frac{1}{e}$: Το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων x_1 και x_2, που αποτελούν τις αρνητικές λύσεις της εξίσωσης $V(x) = E$ (δηλ. τις λύσεις της $-xe^x = v_0$).

η περίοδος της κίνησης είναι $T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[E - V(x)]}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - x^2 e^{2x}}}$.

• $E = \frac{1}{2e^2} \Leftrightarrow v_0 = \frac{1}{e}$: Το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα x μέχρι το σημείο $x_{\max}$ το οποίο αποτελεί την θετική λύση της εξίσωσης $V(x) = E$ (δηλ. την λύση της $xe^x = \frac{1}{e}$), εκεί αλλάζει φορά κίνησης και στη συνέχεια κινείται επ' άπειρον προς το σημείο $x = -1$ όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη.

• $E > \frac{1}{2e^2} \Leftrightarrow v_0 > \frac{1}{e}$: Το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα x μέχρι το σημείο $x_{\max}$ το οποίο αποτελεί την θετική λύση της εξίσωσης $V(x) = E$ (δηλ. την λύση της $xe^x = v_0$), εκεί αλλάζει φορά κίνησης και στη συνέχεια κινείται επ' άπειρον προς μικρότερα x, μέχρι το $x = -\infty$ (όπου φτάνει με ταχύτητα $-\sqrt{2[E - \lim_{x\to-\infty} V(x)]} = -v_0$).

(δ)



(ε) Τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα και ενέργεια $E = e^2/2$, επομένως η ταχύτητά τους σε κάθε θέση x είναι ίδια, ίση με $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]} = \pm\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}$ (τα δύο πρόσημα αντιστοιχούν στις δύο φορές κίνησης). Δηλ. το δεύτερο επαναλαμβάνει την κίνηση του πρώτου με χρονική καθυστέρηση τ. Για να συναντηθούν πρέπει το πρώτο να έχει ανακλαστεί στην θέση όπου $V(x) = E \Leftrightarrow x^2 e^{2x} = e^2 \Leftrightarrow x = 1$ και να κινείται προς μικρότερα x, ενώ το δεύτερο δεν έχει αλλάξει φορά κίνησης.

Ολοκληρώνοντας την σχέση $dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dx}{\pm\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}}$, επιλέγοντας το κατάλληλο πρόσημο ανάλογα με την φορά κίνησης, βρίσκουμε ότι το πρώτο σώμα φτάνει στο σημείο ανάκλασης σε χρόνο $t_{0\to1}$, όπου $\int_0^{t_{0\to1}} dt = \int_0^1 \frac{dx}{|\dot{x}|} \Leftrightarrow t_{0\to1} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}}$, ενώ φτάνει στο σημείο συνάντησης σε χρόνο t_σ, όπου $\int_{t_{0\to1}}^{t_\sigma} dt = \int_1^{1/2} \frac{dx}{-|\dot{x}|} \Leftrightarrow t_\sigma = t_{0\to1} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}}$.

Το δεύτερο σώμα φτάνει στο σημείο συνάντησης στον ίδιο χρόνο t_σ, όπου $\int_\tau^{t_\sigma} dt = \int_0^{1/2} \frac{dx}{|\dot{x}|} \Leftrightarrow t_\sigma = \tau + \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}}$.

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις του t_σ προκύπτει $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}} = \tau + \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}}$, ή ισοδύναμα $\tau = 2\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{e^2 - x^2 e^{2x}}}$.

Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να βρεθεί αμέσως, βάσει της σκέψης ότι το πρώτο σώμα εκτελεί επιπλέον του δεύτερου την διαδρομή από το σημείο $x = 1/2$ στο σημείο ανάκλασης $x = 1$ και πίσω στο σημείο $x = 1/2$. Ο χρόνος αυτής της επιπλέον κίνησης είναι ίσος με την καθυστέρηση εκκίνησης του δεύτερου σώματος (αφού τα δύο σώματα βρίσκονται ταυτόχρονα στο σημείο συνάντησης $x = 1/2$).

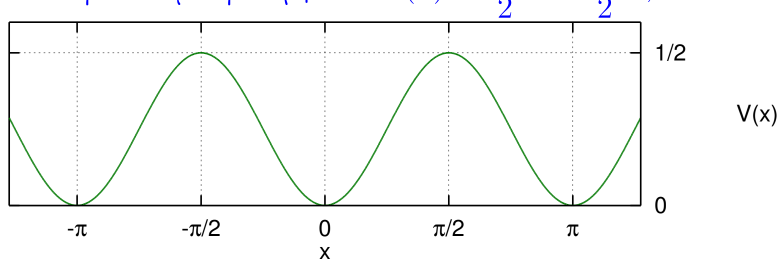
---

2. Έστω σύστημα αξόνων με κέντρο το σημείο στήριξης του νήματος, άξονα x κατακόρυφο προς τα κάτω και άξονα y οριζόντιο προς την αρχική φορά κίνησης. Οι πολικές συντεταγμένες σε αυτό το σύστημα είναι η ακτίνα $\varpi = R$ και η γωνία ϕ του νήματος με την αρχική κατεύθυνσή του.

Η δυναμική βαρυτική ενέργεια είναι $-mgx$, οπότε η διατήρηση ενέργειας γράφεται $\frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi = E$.
Ο νόμος Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση γράφεται $T - mg\cos\phi = \frac{mv^2}{R}$, όπου T η τάση του νήματος.
(α) Στο σημείο χαλάρωσης $T = 0$ και άρα $0 - mg\cos\phi_0 = \frac{mv_0^2}{R} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{-gR\cos\phi_0} = \sqrt{gR/\sqrt{3}}$.
Η φορά της ταχύτητας είναι η εφαπτομένη του κύκλου $\hat{\phi} = -\sin\phi_0\hat{x} + \cos\phi_0\hat{y} = -\sqrt{2/3}\ \hat{x} - \sqrt{1/3}\ \hat{y}$.
(β) Από διατήρηση ενέργειας μεταξύ κατώτερης θέσης και θέσης χαλάρωσης $\frac{mv_i^2}{2} - mgR = \frac{mv_0^2}{2} - mgR\cos\phi_0$ προκύπτει $v_i = \sqrt{gR\left(2+\sqrt{3}\right)}$.
(γ) Το σώμα εκτελεί πλάγια βολή. Η αρχική θέση είναι $\vec{r}_0 = R\hat{\varpi} = R\left(\cos\phi_0\hat{x} + \sin\phi_0\hat{y}\right)$ και η αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\hat{\phi} = v_0\left(-\sin\phi_0\hat{x} + \cos\phi_0\hat{y}\right)$. Επομένως η θέση σε κάθε χρόνο (θεωρώντας $t = 0$ την στιγμή της χαλάρωσης) είναι $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$, ή σε συνιστώσες $x = R\cos\phi_0 - v_0 t\sin\phi_0 + \frac{gt^2}{2}$ και $y = R\sin\phi_0 + v_0 t\cos\phi_0$, όπου $v_0 = \sqrt{-gR\cos\phi_0}$.
Απαλείφοντας το χρόνο βρίσκουμε την παραβολική εξίσωση τροχιάς $y^2 - 2Ry\sin^3\phi_0 + 2Rx\cos^3\phi_0 - 2R^2\cos^2\phi_0 + R^2\sin^2\phi_0 = 0$. Για την δεδοεμένη ϕ_0 προκύπτει $x = \frac{3\sqrt{3}}{2R}y^2 - 2\sqrt{2}y$, δηλ. πράγματι η τροχιά περνά από την αρχή των αξόνων.

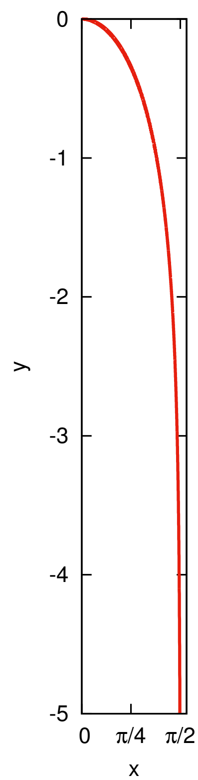
---

3. (α) Οι συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $\vec{a} = \cos x\ \vec{v}\times\hat{z}$ είναι $\ddot{x} = \dot{y}\cos x$, $\ddot{y} = -\dot{x}\cos x$, $\ddot{z} = 0$.
($α_1$) Η τρίτη δίνει $\dot{z} =$ σταθερά $= 0$ λόγω αρχικών συνθηκών, οπότε $z =$ σταθερά $= 0$ λόγω αρχικών συνθηκών.
($α_2$) Η δεύτερη ολοκληρώνεται σε $\dot{y} + \sin x =$ σταθερά $= 0$ λόγω αρχικών συνθηκών, οπότε $v_y = -\sin x$.
($α_3$) Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $\ddot{x} = -\sin x\cos x$, η οποία είναι «νόμος Νεύτωνα» μονοδιάστατης κίνησης $\ddot{x} = f(x)$ με «δύναμη» $f(x) = -\sin x\cos x$. Είναι ισοδύναμη με ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$, όπου $V = -\int f(x)\ dx = \frac{\sin^2 x}{2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Το ολοκλήρωμα θα μπορούσε να βρεθεί και μέσω της διατήρησης κινητικής ενέργειας του φορτίου (η οποία ισχύει αφού το έργο της δύναμης από το μαγνητικό πεδίο – η οποία είναι κάθετη στην κίνηση – είναι μηδενικό). Είναι $E = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2}$, όπου ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια της μονοδιάστατης κίνησης $\frac{\dot{x}^2}{2}$ και ο δεύτερος όρος είναι η «δυναμική ενέργεια» $V(x) = \frac{v_y^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}$, διότι όπως βρέθηκε $v_y = -\sin x$.



($β_1$) $E = \frac{v_0^2}{2} + V(0) = \frac{1}{2}$, άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\dot{x} = \pm\cos x$. Αρχικά είναι $\dot{x} > 0$ οπότε τουλάχιστον για κάποιο χρόνο θα ισχύει το πάνω πρόσημο $\dot{x} = \cos x \Leftrightarrow \int_0^x \frac{dx}{\cos x} = \int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = t \Leftrightarrow \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = e^{2t} \Leftrightarrow \sin x = \tanh t \Leftrightarrow x = \arcsin(\tanh t)$.
Η $\sin x$ αυξάνεται από την αρχική μηδενική τιμή της μέχρι την μονάδα, δηλ. η x αυξάνεται από την αρχική τιμή της $x = 0$ μέχρι την τιμή $\pi/2$, επομένως η $\dot{x}$ δεν αλλάζει ποτέ πρόσημο (ισχύει πάντα το πάνω πρόσημο

στην $\dot{x} = \pm\cos x$).
Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από την γραφική μελέτη της $V(x)$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η ενέργεια είναι ίση με το μέγιστο της $V(x)$ επομένως το σώμα θα κινείται επ΄ άπειρον προς το σημείο $x = \pi/2$.
(β_2) Ολοκληρώνοντας την $v_y = -\sin x \Leftrightarrow \dot{y} = -\tanh t \Leftrightarrow \int_0^y dy = -\int_0^t \tanh t\, dt \Leftrightarrow y = -\ln(\cosh t)$.
(β_3) $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$ με $v_x = \cos x$ και $v_y = -\sin x$, άρα $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \int_0^y dy = -\int_0^x \frac{\sin x}{\cos x} dx \Leftrightarrow y = \ln(\cos x)$.
Αλλιώς: Η σχέση μεταξύ y και x μπορεί να βρεθεί απαλείφοντας τον χρόνο μεταξύ των $y = -\ln(\cosh t)$ και $x = \arcsin(\tanh t)$. Είναι $y = -\ln(\cosh t) = -\ln\sqrt{\frac{\cosh^2 t}{\cosh^2 t - \sinh^2 t}} = \ln\sqrt{1-\tanh^2 t} = \ln\sqrt{1-\sin^2 x} = \ln(\cos x)$.



Το σώμα καταλήγει να κινείται παράλληλα στον άξονα y με ταχύτητα $-\hat{y}$ (το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται). Στην x διεύθυνση πλησιάζει επ΄ άπειρον το σημείο $x = \pi/2$ όπως προαναφέρθηκε.
(γ) Η ενέργεια είναι $E = \frac{v_0^2}{2} + V(0) = \frac{(1\pm\epsilon)^2}{2}$.
Για το πάνω πρόσημο η ενέργεια είναι λίγο μεγαλύτερη από το μέγιστο της $V(x)$, επομένως το σώμα θα κινείται συνεχώς προς μεγαλύτερα x (δεν υπάρχει λύση της $V(x) = E \Leftrightarrow \sin^2 x = (1\pm\epsilon)^2$ το οποίο θα αντιστοιχούσε σε μηδενισμό της ταχύτητας).
Για το κάτω πρόσημο η ενέργεια είναι λίγο μικρότερη από το μέγιστο της $V(x)$, επομένως το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων $\pm x_b$ που αποτελούν τις λύσεις της $V(x) = E \Leftrightarrow \sin^2 x = (1-\epsilon)^2$ εκατέρωθεν της αρχικής θέσης. Είναι δηλ. $x \in [-x_b, x_b]$ με $x_b = \arcsin(1-\epsilon)$.
Αφού $\epsilon \ll 1$ η x_b είναι λίγο μικρότερη του $\frac{\pi}{2}$. Θέτοντας $x_b = \frac{\pi}{2} - \delta$ είναι $\frac{\pi}{2} - \delta = \arcsin(1-\epsilon) \Leftrightarrow 1-\epsilon = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \cos\delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2} \Leftrightarrow \delta = \sqrt{2\epsilon}$ (διότι $\delta > 0$). Άρα $x_b \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\epsilon}$.