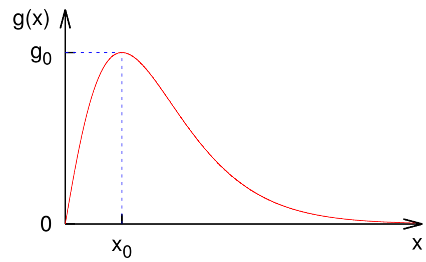
Μηχανική Ι – Εργασία #4

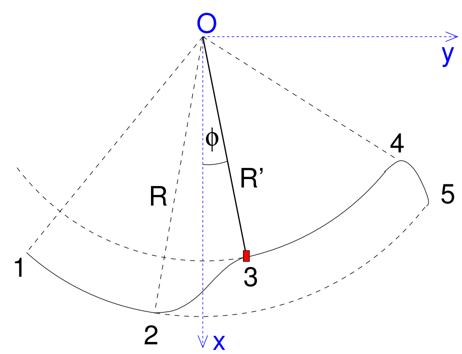
Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

1. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στο χώρο $x > 0$ υπό την επίδραση πεδίου με δυναμικό $V(x) = -\frac{1}{x}e^{-x} + \frac{\beta}{2x^2}$, όπου β θετική σταθερά. Η δύναμη γράφεται $F(x) = \frac{\beta - g(x)}{x^3}$ με $g(x) = x(x+1)e^{-x}$.
(α) Σχεδιάστε το γράφημα του δυναμικού (διερευνήστε για διάφορες τιμές του β). Βρείτε τα ευσταθή και ασταθή σημεία ισορροπίας (όταν υπάρχουν).
(β) Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας (όταν αυτό υπάρχει).

Υπόδειξη: Το πρόσημο της $V'(x)$ καθορίζεται από το πρόσημο της διαφοράς $g(x) - \beta$. Η μελέτη της $g(x)$ δείχνει ότι ξεκινά από το $g(0) = 0$, είναι αύξουσα μέχρι το $x_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62$ όπου αποκτά τη μέγιστη τιμή $g(x_0) = g_0 \approx 0.84$, και είναι φθίνουσα στο διάστημα $x > x_0$, καταλήγοντας στο $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.



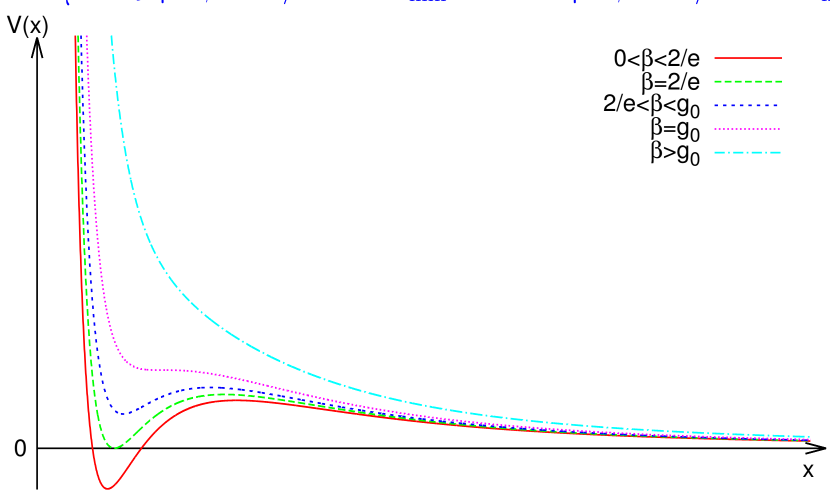
2. Το Botafumeiro είναι ένα διάσημο θυμιατό που ταλαντώνεται σαν εκκρεμές στον Καθεδρικό Ναό της πόλης Σαντιάγκο ντε Κομποστέλα στη Γαλικία (Ισπανία). Όπως μπορείτε να δείτε στο video η κατάλληλη αυξομείωση του μήκους του σχοινιού από τους ρασοφόρους «tiraboleiros» οδηγεί σε εντυπωσιακή αύξηση του πλάτους ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, οι tiraboleiros τραβάνε το σχοινί και μειώνουν το μήκος του εκκρεμούς από R σε R' όταν το θυμιατό βρίσκεται κοντά στην κατώτερη θέση ενώ αυξάνουν το μήκος από R' στην αρχική τιμή του R όταν το θυμιατό βρίσκεται κοντά στις ακραίες θέσεις. Η κίνηση από αριστερά προς τα δεξιά φαίνεται στο δίπλα σχήμα (όμοια είναι η κίνηση του θυμιατού από δεξιά προς τα αριστερά).



Για να εξηγήσουμε το φαινόμενο θα απλουστεύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας ότι έχουμε σημειακό σώμα μάζας m δεμένο σε αβαρές μη-εκτατό νήμα, ότι η μείωση του μήκους μεταξύ των θέσεων 2 και 3 γίνεται πολύ γρήγορα έτσι ώστε η γωνία ϕ να μην προλαβαίνει να αλλάξει σημαντικά (είναι κοντά στην μηδενική τιμή) και ότι η αύξηση του μήκους μεταξύ των θέσεων 4 και 5 γίνεται επίσης πολύ γρήγορα ώστε η γωνία ϕ είναι περίπου σταθερή και ίση με την μέγιστη τιμή της.
(α) Έστω η γωνία στην ακραία θέση 1 είναι $-\phi^{(1)}_{\max}$. Θεωρώντας ότι η θέση 2 είναι πρακτικά η κατώτερη ($\phi \approx 0$) βρείτε την ταχύτητα στη θέση αυτή.
(β) Θεωρώντας ότι στην μετακίνηση $2 \to 3$ είναι $|\phi| \ll 1$ δείξτε ότι η στροφορμή διατηρείται και υπολογίστε την ταχύτητα στην θέση 3.
(γ) Βρείτε την δύναμη που ασκούν οι tiraboleiros σαν συνάρτηση της $\varpi(t)$ και δείξτε ότι το έργο της στην μετακίνηση $2 \to 3$ είναι ίσο με την αύξηση της μηχανικής ενέργειας. (Η ακτινική ταχύτητα ξεκινά από μηδενική στη θέση 2 και καταλήγει σε μηδενική στη θέση 3.)
(δ) Ποια είναι η γωνία $\phi^{(2)}_{\max}$ στην ακραία θέση 4;
(ε) Έστω η μετακίνηση $4 \to 5$ είναι ακτινική και η ταχύτητα στη θέση 5 μηδενική. Ποιο το έργο της τάσης του σχοινιού σε αυτή; Ποιο είναι το συνολικό έργο της τάσης για την κίνηση από το 1 στο 5;
(στ) Γιατί η αποδοτικότερη αύξηση του πλάτους υλοποιείται όταν η μείωση του μήκους του νήματος φροντίσουμε να συμβεί στη κατώτερη θέση και η αύξηση του μήκους συμβεί στην ακραία θέση;
(ζ) Αν $R = 20.6$ m, $R - R' = 2.9$ m, $m = 56.5$ kg και αρχικά το θυμιατό αφήνεται από $\phi^{(1)}_{\max} = 13°$ βρείτε τις γωνίες των επόμενων δύο ακραίων θέσεων και την ενέργεια που δίνουν οι tiraboleiros.

Λύσεις – Εργασία #4

1. (α) Είναι $V'(x) = -F(x) = \dfrac{g(x)-\beta}{x^3}$ και $V''(x) = -\dfrac{3}{x}V'(x) + \dfrac{g'(x)}{x^3}$.
Το πρόσημο της $V'(x)$ είναι ίδιο με το πρόσημο της διαφοράς $g(x)-\beta$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:
• Αν $\beta > g_0$ είναι $\beta > g(x)$ για κάθε x, δηλ. η $V'(x)$ είναι αρνητική σε όλα τα x. Άρα η $V(x)$ είναι φθίνουσα και μεταβάλλεται από $\lim_{x\to 0} V(x) = +\infty$ σε $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$. Σημεία ισορροπίας δεν υπάρχουν.
• Αν $\beta = g_0$ η $V'(x)$ μηδενίζεται μόνο στο $x = x_0$ και είναι αρνητική σε κάθε άλλη θέση. Επομένως η $V(x)$ είναι φθίνουσα και πριν και μετά το x_0. Μεταβάλλεται από $\lim_{x\to 0} V(x) = +\infty$ σε $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$. Η ισορροπία στο σημείο $x = x_0$ είναι ασταθής διότι αν αυξηθεί απειροστά το x η δύναμη είναι απωστική.
• Αν $\beta < g_0$ υπάρχουν δύο μηδενισμοί της διαφοράς $g(x)-\beta$, δηλ. δύο μηδενισμοί της $V'(x)$ στα σημεία ισορροπίας x_1, x_2 με $x_1 < x_0 < x_2$. Είναι $V''(x_1) = \dfrac{g'(x_1)}{x_1^3} > 0$ οπότε το σημείο είναι ελάχιστο και η ισορροπία στο σημείο $x = x_1$ είναι ευσταθής. Επίσης $V''(x_2) = \dfrac{g'(x_2)}{x_2^3} < 0$ οπότε το σημείο είναι μέγιστο και η ισορροπία στο σημείο $x = x_2$ είναι ασταθής.
Στο διάστημα $0 < x < x_1$ είναι $g(x) < \beta$, επομένως η $V(x)$ είναι φθίνουσα και μεταβάλλεται από $\lim_{x\to 0} V(x) = +\infty$ σε $V(x_1)$. Στο διάστημα $x_1 < x < x_2$ είναι $g(x) > \beta$, επομένως η $V(x)$ είναι αύξουσα και μεταβάλλεται από $V(x_1)$ σε $V(x_2)$. Τέλος στο διάστημα $x_2 < x < \infty$ είναι $g(x) < \beta$, επομένως η $V(x)$ είναι φθίνουσα και μεταβάλλεται από $V(x_2)$ σε $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$.
Η ελάχιστη τιμή του δυναμικού $V(x_1) = V_{\min}$ στο $x = x_1$ μπορεί να είναι θετική, μηδενική ή αρνητική, ανάλογα με την τιμή του β. Μέσω των σχέσεων $g(x_1) = \beta \Leftrightarrow x_1(x_1+1)e^{-x_1} = \beta$ και $V_{\min} = -\dfrac{1}{x_1}e^{-x_1} + \dfrac{\beta}{2x_1^2}$ μπορούμε να θεωρήσουμε τα x_1 και $V_{\min}$ συναρτήσεις του β. Είναι $\dfrac{dV_{\min}}{d\beta} = \dfrac{\partial V_{\min}}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{d\beta} + \dfrac{\partial V_{\min}}{\partial \beta} = \dfrac{1}{2x_1^2} > 0$. Ο μηδενισμός του $V_{\min}$ υλοποιείται για $\beta = 2/e$ (όπως βρίσκεται λύνοντας το σύστημα $V_{\min} = 0$ και $x_1(x_1+1)e^{-x_1} = \beta$). Επομένως για $\beta > 2/e$ είναι $V_{\min} > 0$ και για $\beta < 2/e$ είναι $V_{\min} < 0$.



(β) Για $\beta < g_0$ γύρω από το $x = x_1$ είναι $V(x) \approx V(x_1) + \dfrac{1}{2}V''(x_1)(x-x_1)^2$ και $F(x) \approx -V''(x_1)(x-x_1)$, επομένως η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με $q = x - x_1$ και $\omega = \sqrt{V''(x_1)} = \sqrt{\dfrac{g'(x_1)}{x_1^3}} = \sqrt{\dfrac{1+x_1-x_1^2}{x_1^3 e^{x_1}}}$.
Άρα οι μικρές ταλαντώσεις έχουν περίοδο $2\pi\sqrt{\dfrac{x_1^3 e^{x_1}}{1+x_1-x_1^2}}$.

2. (α) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgx = \frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi$ μεταξύ των θέσεων 1 και 2 έχουμε $0 - gR\cos\phi_{\max}^{(1)} = \frac{v_2^2}{2} - gR \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2gR(1-\cos\phi_{\max}^{(1)})}$.

(β) Το βάρος είναι κατακόρυφο και η ροπή του (ως προς το O) είναι μηδενική, όπως και η ροπή της τάσης. Άρα η στροφορμή $m\varpi v$ διατηρείται.

Αυτό φαίνεται και από την $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi}) = m\vec{g}\cdot\hat{\phi} = -mg\sin\phi \approx 0$.

Η διατήρηση στροφορμής μεταξύ των θέσεων 2 και 3 δίνει $v_3 = \frac{R}{R'}v_2 \Leftrightarrow v_3 = \frac{R}{R'}\sqrt{2gR(1-\cos\phi_{\max}^{(1)})}$.

(γ) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = mg - T$, χρησιμοποιώντας την διατήρηση στροφορμής $\varpi v = \varpi^2\dot{\phi} = Rv_2$ δίνει $T = \frac{mR^2v_2^2}{\varpi^3} + mg - m\ddot{\varpi}$.

Το έργο της στην μετακίνηση $2 \to 3$ είναι $W_T^{2\to 3} = \int_2^3 (-T\hat{\varpi})\cdot d\vec{r} = \int_2^3 \left(\frac{-mR^2v_2^2}{\varpi^3} - mg + m\ddot{\varpi}\right)d\varpi = \left[\frac{mR^2v_2^2}{2\varpi^2} - mg\varpi\right]_R^{R'} + \int_2^3 m\ddot{\varpi}\dot{\varpi}\,dt = \frac{mR^2v_2^2}{2R'^2} - \frac{mv_2^2}{2} + mg(R-R') + \left[\frac{m\dot{\varpi}^2}{2}\right]_2^3$. Αφού η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική στις θέσεις 2 και 3 ο τελευταίος όρος μηδενίζεται, οπότε πράγματι ισχύει η (αναμενόμενη από το Θ.Μ.Κ.Ε.) σχέση $W_T^{2\to 3} = \left[\frac{mv^2}{2} - mg\varpi\right]_2^3$. Το έργο των tiraboleiros στην μετακίνηση $2 \to 3$ προκύπτει $W_T^{2\to 3} = mgR\frac{R^2 - R'^2}{R'^2}\left(1 - \cos\phi_{\max}^{(1)}\right) + mg(R - R')$.

(δ) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgR'\cos\phi$ μεταξύ των θέσεων 3 και 4 έχουμε $\frac{v_3^2}{2} - gR' = 0 - gR'\cos\phi_{\max}^{(2)} \Leftrightarrow 1 - \cos\phi_{\max}^{(2)} = (R/R')^3\left(1 - \cos\phi_{\max}^{(1)}\right)$.

Η χρήση της ταυτότητας $1 - \cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2}$ δίνει $\sin\frac{\phi_{\max}^{(2)}}{2} = (R/R')^{3/2}\sin\frac{\phi_{\max}^{(1)}}{2}$.

Έχουμε γεωμετρική πρόοδο και μετά από m ημιπεριόδους της κίνησης είναι $\sin\frac{\phi_{\max}^{(1+m)}}{2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^{3m/2}\sin\frac{\phi_{\max}^{(1)}}{2}$.

(ε) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = mg\cos\phi - T$ για σταθερή $\phi = \phi_{\max}^{(2)}$ δίνει $T = mg\cos\phi_{\max}^{(2)} - m\ddot{\varpi}$.

Το έργο της στην μετακίνηση $4 \to 5$ είναι $W_T^{4\to 5} = \int_4^5 (-T\hat{\varpi})\cdot d\vec{r} = \int_4^5 \left(-mg\cos\phi_{\max}^{(2)} + m\ddot{\varpi}\right)d\varpi = -mg\cos\phi_{\max}^{(2)}\left[\varpi\right]_{R'}^{R} + \int_4^5 m\ddot{\varpi}\dot{\varpi}\,dt = -mg(R-R')\cos\phi_{\max}^{(2)} + \left[\frac{m\dot{\varpi}^2}{2}\right]_4^5$. Αφού η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική στις θέσεις 4 και 5 ο τελευταίος όρος μηδενίζεται, οπότε $W_T^{4\to 5} = -mg(R-R')\cos\phi_{\max}^{(2)}$.

Ισχύει η (αναμενόμενη από το Θ.Μ.Κ.Ε.) σχέση $W_T^{4\to 5} = \left[\frac{mv^2}{2} - mg\varpi\cos\phi\right]_4^5$.

Το συνολικό έργο της τάσης για την κίνηση από το 1 στο 5 είναι $W_T^{1\to 5} = mgR\frac{R^3 - R'^3}{R'^3}(1 - \cos\phi_{\max}^{(1)})$.

(στ) Όταν ελαττώσουμε το μήκος δίνουμε ενέργεια στο σύστημα μέσω της τάσης του σχοινιού αφού η τάση είναι ομόρροπη στην μετατόπιση. Σε ένα κύκλο πρέπει επίσης να αυξήσουμε το μήκος επαναφέροντάς το στην αρχική τιμή του. Όσο το κάνουμε αυτό αφαιρούμε ενέργεια από το σύστημα, αφού η τάση είναι αντίρροπη στην μετατόπιση. Αφού οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι ίδιες στην μείωση και αύξηση του μήκους ο αποδοτικότερος τρόπος να δώσουμε ενέργεια στο σύστημα είναι να ελαττώνουμε το μήκος εκεί που η τάση είναι μέγιστη και να το αυξάνουμε εκεί όπου είναι ελάχιστη. Από $\frac{mv^2}{\varpi} = T - mg\cos\phi \Leftrightarrow T =$

$\frac{mv^2}{\varpi} + mg\cos\phi$ (σχέση που ισχύει όσο η ακτίνα είναι σταθερή) φαίνεται ότι η τάση είναι μέγιστη στην κατώτερη θέση (τόσο η ταχύτητα όσο και το $\cos\phi$ είναι μέγιστα εκεί) και ελάχιστη στην ακραία θέση (τόσο η ταχύτητα όσο και το $\cos\phi$ είναι ελάχιστα εκεί). Άρα συμφέρει να μειώσουμε το μήκος στην κατώτερη θέση και να το αυξήσουμε στην ακραία θέση.

(ζ) Η σχέση $1-\cos\phi_{\max}^{(n+1)} = (R/R')^3\left(1-\cos\phi_{\max}^{(n)}\right)$ μας δίνει κάθε νέο πλάτος $\phi_{\max}^{(n+1)}$ συναρτήσει του παλαιού $\phi_{\max}^{(n)}$. Προκύπτει $\phi_{\max}^{(n+1)} = \arccos\left[1-(R/R')^3\left(1-\cos\phi_{\max}^{(n)}\right)\right]$ και για $\phi_{\max}^{(1)} = 13^\circ$ έχουμε $\phi_{\max}^{(2)} = 16.34^\circ$ $\phi_{\max}^{(3)} = 20.56^\circ$.

Οι επόμενες μέγιστες γωνίες είναι $\phi_{\max}^{(4)} = 25.90^\circ$, $\phi_{\max}^{(5)} = 32.68^\circ$, $\phi_{\max}^{(6)} = 41.37^\circ$, $\phi_{\max}^{(7)} = 52.66^\circ$, $\phi_{\max}^{(8)} = 67.68^\circ$, $\phi_{\max}^{(9)} = 88.72^\circ$. Η μελέτη μας όμως δεν είναι σωστή για μεγάλα πλάτη όπου οι ταχύτητες θα είναι επίσης μεγάλες και πρέπει να λάβουμε υπόψη πολλούς άλλους παράγοντες, π.χ. το ότι το θυμιατό δεν είναι σημειακό, το σχοινί έχει βάρος, υπάρχει αντίσταση αέρα.

Η ενέργεια που δίνουν οι tiraboleiros για να αυξηθεί η μέγιστη γωνία από $\phi_{\max}^{(n)}$ σε $\phi_{\max}^{(n+1)}$ είναι η μεταβολή μηχανικής ενέργειας $W_n = mgR\left(\cos\phi_{\max}^{(n)} - \cos\phi_{\max}^{(n+1)}\right)$.

Αυτό ισούται με το $W_T^{1\to5} = mgR\frac{R^3-R'^3}{R'^3}(1-\cos\phi_{\max}^{(n)})$ που έχει βρεθεί στο ερώτημα (ε). Είναι $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{1-\cos\phi_{\max}^{(n+1)}}{1-\cos\phi_{\max}^{(n)}} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3$, δηλ. έχουμε γεωμετρική αύξηση.

Για τη μετακίνηση από $\phi_{\max}^{(1)}$ σε $\phi_{\max}^{(2)}$ δίνουν $W_1 = 168.54$ J και για τη μετακίνηση από $\phi_{\max}^{(2)}$ σε $\phi_{\max}^{(3)}$ δίνουν $W_2 = 266.08$ J.