Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

---

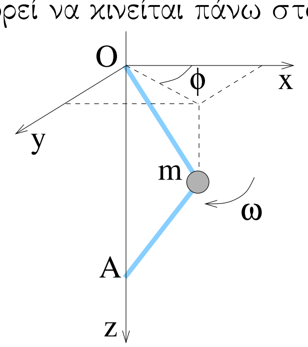
1. Παίχτης του τένις πετάει την μπάλα στην εξέδρα. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας είναι $v_i = 260$ km/h και η απόσταση παίκτη–εξέδρας 20 m.
(α) Με τι ταχύτητα φτάνει η μπάλα στην εξέδρα;
Αγνοήστε την περιστροφή της μπάλας και το βάρος (δηλ. θεωρήστε ευθύγραμμη την κίνηση), αλλά λάβετε υπόψη την αντίσταση του αέρα $\frac{1}{2}C_D\rho S v^2$ με $C_D = 0.5$, $\rho = 1.2$ kg/m^3 την πυκνότητα του αέρα, $S = 34$ cm^2 την επιφάνεια της μπάλας ($S = \pi R^2$ με $R = 3.3$ cm) και v την ταχύτητά της. Η μάζα της μπάλας είναι $m = 57$ g.
(β) Αν η μπάλα βάλλεται οριζόντια και λόγω της βαρύτητας αποκτά κατακόρυφη ταχύτητα v_y πολύ μικρότερη της οριζόντιας v_x, δείξτε ότι η προσεγγιστική εξίσωση που δίνει την ταχύτητα συναρτήσει της οριζόντιας απόστασης x είναι $\dfrac{d\vec{v}}{dx} + \dfrac{\vec{v}}{x_0} = \dfrac{\vec{g}}{v_x}$, όπου $x_0 = \dfrac{2m}{C_D\rho S}$.
Επιλύστε τις συνιστώσες της εξίσωσης αυτής.
Ποια είναι προσεγγιστικά η τροχιά της μπάλας;
Δίνεται ότι η γενική λύση της $\dfrac{df}{dx} + af = be^{ax}$ είναι $f = \dfrac{b}{2a}e^{ax} + Ce^{-ax}$, όπου a, b, C σταθερές.

---

2. Σώμα κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο μέσω ενός αβαρούς και μη-εκτατού νήματος με ένα σταθερό κατακόρυφο πάσσαλο.
Κάποιος ισχυρίζεται ότι καθώς το νήμα τυλίγεται στον πάσσαλο και άρα η απόσταση του σώματος από αυτόν ελαττώνεται, λόγω διατήρησης στροφορμής το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.
Κάποιος άλλος ισχυρίζεται ότι λόγω διατήρησης ενέργειας το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό.
Ποιος έχει δίκιο και γιατί;

---

3. Το σώμα m του σχήματος στηρίζεται μέσω δύο αβαρών ραβδών μήκους R με τον κατακόρυφο άξονα z και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από αυτόν. Η γωνία μεταξύ των ραβδών μπορεί να ανοιγοκλείνει ελεύθερα. Το άκρο Ο της μιας ράβδου (αυτό που δεν συνδέεται με το σώμα) είναι σταθερό ενώ το άκρο της άλλης Α (αυτό που δεν συνδέεται με το σώμα) μπορεί να κινείται πάνω στον άξονα z.



Αρχικά το σώμα βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}_0 = R\hat{x}$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = \omega_0 R\hat{y}$.
Κινώντας κατάλληλα το άκρο Α η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$ είναι σε κάθε χρόνο $\dot{\phi} = \dfrac{2\omega_0}{1 + 2e^{-\lambda t^2} - e^{-2\lambda t^2}}$.
(α) Πως κινούμε το άκρο Α για να συμβεί αυτό; Ποια η χρονική διάρκεια της κίνησης;
(β) Πόση ενέργεια δίνουμε κατά την κίνηση;
Η επιτάχυνση βαρύτητας g θεωρείται γνωστή.

Λύσεις – Εργασία #3

1. (α) $m\dot{v} = -\frac{1}{2}C_D\rho S v^2$. Θέτοντας $\dot{v} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ και $x_0 = \frac{2m}{C_D\rho S} = 55.88$ m έχουμε $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x_0} \Leftrightarrow \int_{v_i}^{v}\frac{dv}{v} = -\int_0^x \frac{dx}{x_0} \Leftrightarrow v = v_i\exp(-x/x_0)$. Σε απόσταση $x = 20$ m προκύπτει $v = 181.78$ km/h.

(β) Η δύναμη αντίστασης αέρα είναι $-\frac{1}{2}C_D\rho S v^2\frac{\vec{v}}{v} = -\frac{mv\vec{v}}{x_0}$. Το μέτρο της ταχύτητας είναι προσεγγιστικά $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx v_x$ (αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης ως προς v_y/v_x). Άρα ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $m\dot{\vec{v}} = -\frac{mv_x\vec{v}}{x_0} + m\vec{g}$. Με $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{d\vec{v}}{dx}$ καταλήγουμε στην ζητούμενη.
Η $\hat{x}$ συνιστώσα δίνει $v_x = v_i\exp(-x/x_0)$ όπως βρήκαμε στο ερώτημα (α).
Η $\hat{y}$ συνιστώσα, θεωρώντας τον άξονα y κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω, οπότε $\vec{g} = g\hat{y}$, γράφεται $\frac{dv_y}{dx} + \frac{v_y}{x_0} = \frac{g}{v_x} = \frac{g}{v_i}\exp(x/x_0)$ και έχει γενική λύση $v_y = \frac{gx_0}{2v_i}e^{x/x_0} + De^{-x/x_0}$. Η σταθερά D βρίσκεται από την αρχική συνθήκη $v_y|_{x=0} = 0$ και προκύπτει $v_y = \frac{gx_0}{v_i}\sinh\frac{x}{x_0}$.
Η προσεγγιστική τροχιά είναι $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gx_0}{2v_i^2}\left(e^{2x/x_0} - 1\right) \Leftrightarrow y = \frac{gx_0^2}{4v_i^2}\left(e^{2x/x_0} - 1 - \frac{2x}{x_0}\right)$.

2. Ο δεύτερος έχει δίκιο, το μέτρο της ταχύτητας μένει σταθερό γιατί ισχύει η διατήρηση της ενέργειας. Η στροφορμή ως προς το κέντρο (στον άξονα του πασσάλου) δεν διατηρείται, γιατί η διεύθυνση της τάσης του νήματος είναι εφαπτόμενη στον πάσσαλο και δεν περνά από τον άξονά του, άρα έχει μη-μηδενική ροπή. Όσο μικρή και είναι η ακτίνα του πασσάλου αυτή η μικρή ροπή μειώνει αργά την στροφορμή (αν ο πάσσαλος είχε μηδενική ακτίνα τότε η ροπή θα ήταν μηδενική, αλλά τότε και το μήκος του νήματος θα έμενε σταθερό).

3. (α) Από διατήρηση της $\hat{z}$ συνιστώσας της στροφορμής, η οποία ισχύει αφού στο σώμα δεν ασκείται δύναμη στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση, είναι $\varpi^2\dot{\phi} =$ σταθερό $= R^2\omega_0$ και προκύπτει $\varpi = R\sqrt{\frac{1 + 2e^{-\lambda t^2} - e^{-2\lambda t^2}}{2}}$.
Για το σώμα $z = \frac{z_A}{2}$ και $r = R$, οπότε $\varpi^2 + (z_A/2)^2 = R^2 \Leftrightarrow z_A = \pm R\sqrt{2}\left(1 - e^{-\lambda t^2}\right)$. Δηλ. κινούμε το Α από την αρχική του θέση $z_A = 0$ μέχρι την τελική θέση $z_A = \pm R\sqrt{2}$ (προς τα κάτω ή προς τα πάνω).
Η μετακίνηση αυτή πρακτικά διαρκεί χρόνο $\sim \sqrt{5/\lambda}$ (τότε το εκθετικό $e^{-\lambda t^2}$ πρακτικά μηδενίζεται).

(β) Η ενέργεια που δίνουμε είναι ίση με την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgz$ όπου $v^2 = \dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$ και $z = \frac{z_A}{2}$. Τελικά (για $t \to \infty$) είναι $\dot{\varpi} = \dot{z} = 0$, $\varpi\dot{\phi} = \sqrt{2}R\omega_0$ και $z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$, οπότε η τελική μηχανική ενέργεια είναι $m\omega_0^2R^2 \mp \frac{mgR}{\sqrt{2}}$. Αφαιρώντας την αρχική μηχανική ενέργεια $\frac{m\omega_0^2R^2}{2}$ βρίσκουμε ότι έχουμε δώσει ενέργεια $\frac{m\omega_0^2R^2}{2} \mp \frac{mgR}{\sqrt{2}}$.

Αλλιώς, χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες: Από διατήρηση στροφορμής $\sin^2\theta\dot{\phi} = \omega_0 \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{1 + 2e^{-\lambda t^2} - e^{-2\lambda t^2}}{2}}$, $z = R\cos\theta = \pm R\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}\left(1 - e^{-\lambda t^2}\right)$ και $z_A = 2z$.

Για τον υπολογισμό της μηχανικής ενέργειας $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$ με $\sin^2\theta = \frac{1 + 2e^{-\lambda t^2} - e^{-2\lambda t^2}}{2}$ και (παραγωγίζοντας) $\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = -\lambda t e^{-\lambda t^2}\left(1 - e^{-\lambda t^2}\right)$.