Μηχανική Ι – Εργασία #2

Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο με σταθερή στροφορμή L. Σε πολικές συντεταγμένες είναι $\varpi = \varpi_0(1+\lambda t)^\nu$ και η στροφορμή γράφεται $L = \dfrac{m\lambda\varpi_0^2}{2}\tan\mu$, όπου ϖ_0, λ, ν, μ θετικές σταθερές με $\mu \in (0, \pi/2)$.
(α) Βρείτε την $\phi(t)$ και το πεδίο τιμών της. (Θα χρειαστεί να ξεχωρίσετε τις περιπτώσεις $\nu > 1/2$, $\nu = 1/2$ και $\nu < 1/2$.)
Βρείτε επίσης την εξίσωση τροχιάς $\varpi = \varpi(\phi)$.
(β) Σχεδιάστε την τροχιά αν $\nu = 3/2$ και $\tan\mu = 8\pi$.

---

2. Για την περίπτωση $\nu = 1/2$ της προηγούμενης άσκησης βρείτε την ταχύτητα και επιτάχυνση, τα μοναδιαία $\hat{\varepsilon}$, $\hat{n}$, την επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσα της επιτάχυνσης και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.

Λύσεις – Εργασία #2

1. (α) Θεωρώντας $\phi|_{t=0} = 0$, είναι $L = m\varpi^2\dot\phi \Leftrightarrow \int_0^\phi d\phi = \int_0^t \frac{L}{m\varpi^2}dt \Leftrightarrow \phi = \frac{1}{2}\lambda\tan\mu\int_0^t(1+\lambda t)^{-2\nu}dt$.

• Αν $\nu > 1/2$ η ολοκλήρωση δίνει $\phi = \phi_\infty\left[1 - \frac{1}{(1+\lambda t)^{2\nu-1}}\right] \in [0, \phi_\infty)$, όπου $\phi_\infty = \frac{\tan\mu}{2(2\nu-1)}$.

Είναι $\phi = \phi_\infty\left[1 - \left(\frac{\varpi_0}{\varpi}\right)^{2-1/\nu}\right] \Leftrightarrow \varpi = \frac{\varpi_0}{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_\infty}\right)^{\nu/(2\nu-1)}} \in [\varpi_0, \infty)$.

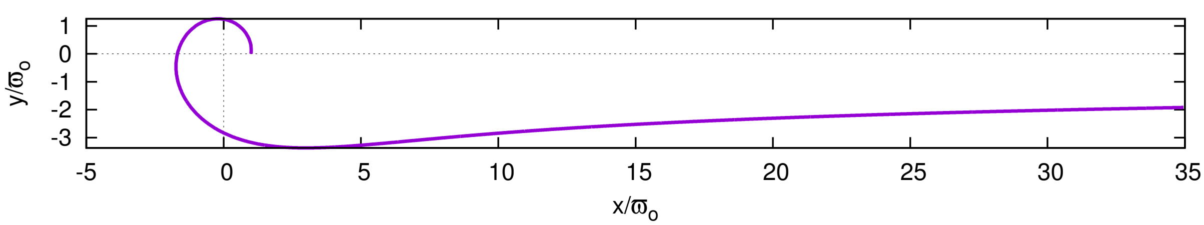
• Αν $\nu = 1/2$ η ολοκλήρωση δίνει $\phi = \frac{\tan\mu}{2}\ln(1+\lambda t) \in [0, \infty)$.

Είναι $\phi = \tan\mu\ \ln\frac{\varpi}{\varpi_0} \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0\ e^{\cot\mu\ \phi} \in [\varpi_0, \infty)$.

• Αν $\nu < 1/2$ η ολοκλήρωση δίνει $\phi = \frac{\tan\mu}{2(1-2\nu)}\left[(1+\lambda t)^{1-2\nu} - 1\right] \in [0, \infty)$.

Είναι $\phi = \frac{\tan\mu}{2(1-2\nu)}\left[\left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{(1-2\nu)/\nu} - 1\right] \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0\left[1 + 2\cot\mu\ (1-2\nu)\phi\right]^{\nu/(1-2\nu)} \in [\varpi_0, \infty)$.

(β) Είναι $\varpi = \varpi_0(1+\lambda t)^{3/2} \in [\varpi_0, \infty)$, $\phi = \phi_\infty\left[1 - \frac{1}{(1+\lambda t)^2}\right] \in [0, \phi_\infty)$, όπου $\phi_\infty = 2\pi$ rad $= 360°$ και $\varpi = \frac{\varpi_0}{(1-\phi/\phi_\infty)^{3/4}}$. Το ότι η γωνία ϕ παίρνει πεπερασμένη μέγιστη τιμή ϕ_∞ ενώ η ακτίνα απειρίζεται σημαίνει ότι η τροχιά έχει ασύμπτωτη $\phi = \phi_\infty = 2\pi$, δηλ. παράλληλη στον x άξονα. Σε μεγάλους χρόνους είναι $y = \varpi\sin\phi = \infty \times 0$ με όριο $\lim_{\phi\to 2\pi} y = \lim_{\phi\to 2\pi}\frac{\varpi_0\sin\phi}{\left(1-\frac{\phi}{2\pi}\right)^{3/4}} \overset{0/0}{=} \lim_{\phi\to 2\pi}\frac{\varpi_0\cos\phi}{\frac{3}{4}\left(1-\frac{\phi}{2\pi}\right)^{-1/4}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)} = 0$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hôpital. Επομένως το σώμα σε πολύ μεγάλους χρόνους καταλήγει να κινείται πάνω στον άξονα x.



2. $\vec r = \varpi\hat\varpi$ με $\varpi = \varpi_0\sqrt{1+\lambda t}$ και $\dot\phi = \frac{L}{m\varpi^2} = \frac{\lambda\tan\mu}{2(1+\lambda t)}$.

$\vec v = \dot\varpi\hat\varpi + \varpi\dot\phi\hat\phi = \frac{\varpi_0\lambda}{2\cos\mu\sqrt{1+\lambda t}}\left(\cos\mu\ \hat\varpi + \sin\mu\ \hat\phi\right)$, $\hat\varepsilon = \frac{\vec v}{|\vec v|} = \cos\mu\ \hat\varpi + \sin\mu\ \hat\phi$.

$\vec a = (\ddot\varpi - \varpi\dot\phi^2)\hat\varpi + \frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi^2\dot\phi)}{dt}\hat\phi = -\frac{\varpi_0\lambda^2}{4\cos^2\mu(1+\lambda t)^{3/2}}\hat\varpi$.

$\vec a_\varepsilon = (\vec a\cdot\hat\varepsilon)\hat\varepsilon = -\frac{\varpi_0\lambda^2}{4\cos\mu(1+\lambda t)^{3/2}}\hat\varepsilon$, $\vec a_\kappa = \vec a - \vec a_\varepsilon = \frac{\varpi_0\lambda^2\sin\mu}{4\cos^2\mu(1+\lambda t)^{3/2}}\left(\cos\mu\ \hat\phi - \sin\mu\ \hat\varpi\right)$, $\hat n = \frac{\vec a_\kappa}{|\vec a_\kappa|} = \cos\mu\ \hat\phi - \sin\mu\ \hat\varpi$, $\mathcal{R} = \frac{v^2}{|\vec a_\kappa|} = \frac{\varpi}{\sin\mu}$.

Το ίδιο από $\frac{\hat n}{\mathcal{R}} = \frac{d\hat\varepsilon}{ds} = \frac{\cos\mu\ \dot{\hat\varpi} + \sin\mu\ \dot{\hat\phi}}{|\vec v|} = \frac{\cos\mu\ \dot\phi\hat\phi - \sin\mu\ \dot\phi\hat\varpi}{|\vec v|} = \frac{\sin\mu}{\varpi}\left(\cos\mu\ \hat\phi - \sin\mu\ \hat\varpi\right)$.