Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2017-2018 Ν. Βλαχάκης

---

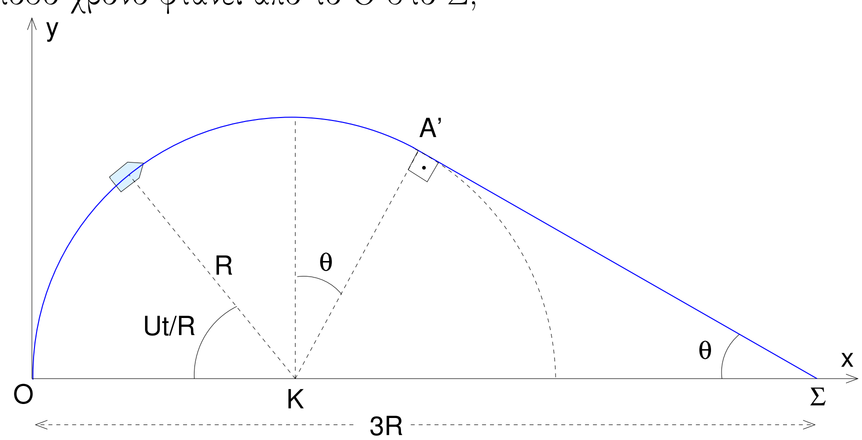
1. Η μέγιστη ισχύς που μπορεί να υπάρξει στο σύμπαν εξαρτάται από τις σταθερές c και G. Βρείτε με διαστατική ανάλυση τον συνδυασμό των σταθερών αυτών που δίνει ισχύ.

---

2. Δύο ταχύπλοα Α και Β βρίσκονται ακίνητα απέχοντας μεταξύ τους απόσταση d. Έστω Oxy το επίπεδο της θάλασσας και οι αρχικές θέσεις $\vec{r}_{A0} = 0$, $\vec{r}_{B0} = d\hat{x}$. Οι οδηγοί συμφωνούν να τρέξουν με τρόπο ώστε κάθε στιγμή ο Β να έχει ταχύτητα λ φορές την ταχύτητα του Α, όπου λ σταθερά διάφορη της μονάδας. Επίσης συμφωνούν ο Α να αρχίσει να κινείται κάθετα στην ευθεία ΑΒ.
(α) Πως πρέπει να κινηθεί ο Α ώστε να συναντήσει τον Β;
(β) Αν $\lambda = 1/2$, η ελάχιστη ακτίνα στροφής του Α είναι $R = 2d/3$ και το μέγιστο μέτρο της ταχύτητάς του U, πως πρέπει να κινηθεί ο Α ώστε να συναντήσει τον Β στον ελάχιστο χρόνο;
(γ) Προαιρετικά: Αν $\lambda = 1/2$, η ελάχιστη ακτίνα στροφής του Α είναι $R = 4d$ και το μέγιστο μέτρο της ταχύτητάς του U, πως πρέπει να κινηθεί ο Α ώστε να συναντήσει τον Β στον ελάχιστο χρόνο;

---

3. Σώμα κινείται στο επίπεδο με ταχύτητα σταθερού μέτρου U όπως στο σχήμα. Για $t = 0$ ξεκινά από το $\mathrm{O}(0, 0)$, για κάποιο χρονικό διάστημα κινείται σε κύκλο ακτίνας R και κέντρου $\mathrm{K}(R, 0)$ και μετά κινείται ευθύγραμμα πάνω στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α′, μέχρι το $\Sigma(3R, 0)$.
(α) Δείξτε ότι $\theta = \pi/6$.
(β) Ποια η θέση σε κάθε χρόνο; (Βρείτε τις $x(t)$ και $y(t)$.) Ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος σε κάθε χρόνο; Σε πόσο χρόνο φτάνει από το Ο στο Σ;



---

4. Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}_1 = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ και $\vec{a}_2 = -3\hat{x} + \hat{y} + \sqrt{90}\hat{z}$.
(α) Ποια τα μέτρα των διανυσμάτων αυτών;
(β) Βρείτε την προβολή του $\vec{a}_2$ πάνω στο $\vec{a}_1$.
(γ) Ποια η γωνία μεταξύ τους; Μπορείτε να την βρείτε προσεγγιστικά;
(δ) Ποιο το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$;
(ε) Έστω ένα άλλο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, στραμμένο ως προς το προηγούμενο, με βάση $\hat{x}' = \dfrac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$, $\hat{y}' = \dfrac{-\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$, $\hat{z}' = \hat{z}$.
(ε_1) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τους άξονες $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{x}'$, $\hat{y}'$.
(ε_2) Ποια η αναπαράσταση του $\vec{a}_2$ σε αυτή την βάση;

Λύσεις – Εργασία #1

1. Στο SI η c έχει μονάδες m s^{-1}, η G έχει μονάδες m^3 kg^{-1} s^{-2} (π.χ. από την σχέση για την επιτάχυνση βαρύτητας $g = GM/R^2$) και η ισχύς P έχει μονάδες kg m^2 s^{-3} (π.χ. από $P = E/t$ με $E = mv^2/2$). Άρα η σχέση $c^a G^b \propto P$ δίνει m^a s^{-a} m^{3b} kg^{-b} s^{-2b} = kg m^2 s^{-3} $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 3b = 2 \\ -b = 1 \\ -a - 2b = -3 \end{array} \right\}$, με λύση $a = 5$, $b = -1$.

Άρα η μέγιστη ισχύς είναι ανάλογη του συνδυασμού $\dfrac{c^5}{G}$.

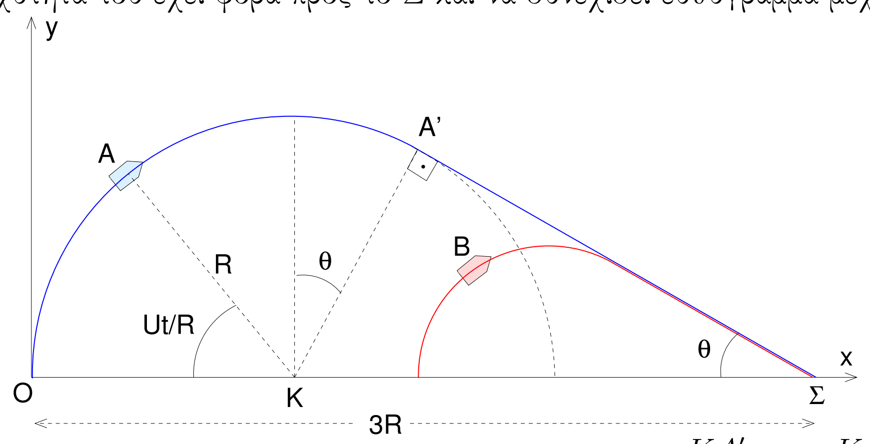
Είναι $\dfrac{c^5}{G} = 3.64 \times 10^{52}$ J/s.

Η μέγιστη αυτή ισχύς ισούται με $\dfrac{Mc^2}{R_g/c}$, δηλ. αντιστοιχεί στην εξαΰλωση συμπαγούς σώματος μάζας M και ακτίνας $R_g = GM/c^2$, το οποίο καταρρέει με την ταχύτητα του φωτός.

---

2. (α) $\vec{v}_B = \lambda \vec{v}_A \Leftrightarrow \displaystyle\int_{\vec{r}_{B0}}^{\vec{r}_B} d\vec{r}_B = \lambda \int_{\vec{r}_{A0}}^{\vec{r}_A} d\vec{r}_A \Leftrightarrow \vec{r}_B - d\hat{x} = \lambda \vec{r}_A$.
Όταν συναντηθούν τα διανύσματα θέσης είναι ίδια $\vec{r}_B = \vec{r}_A = \vec{r}_\Sigma$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε $\vec{r}_\Sigma = \dfrac{d}{1-\lambda}\hat{x}$. Επομένως για να συναντηθούν αρκεί ο Α να οδηγήσει το σκάφος στο σημείο Σ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_\Sigma = \dfrac{d}{1-\lambda}\hat{x}$ (ανεξάρτητα από την τροχιά που θα ακολουθήσει και το πόσο γρήγορα θα τρέξει).
Η μελέτη μπορεί να γίνει και με τις $\hat{x}$ και $\hat{y}$ συνιστώσες της σχέσης $\vec{v}_B = \lambda \vec{v}_A$, δηλ. ολοκληρώνοντας τις $v_{Bx} = \lambda v_{Ax}$ και $v_{By} = \lambda v_{Ay}$, οπότε προκύπτουν οι $x_B - d = \lambda x_A$ και $y_B = \lambda x_B$. Το σημείο συνάντησης, θέτοντας $x_A = x_B = x_\Sigma$ και $y_A = y_B = y_\Sigma$, προκύπτει $x_\Sigma = \dfrac{d}{1-\lambda}$, $y_\Sigma = 0$.

(β) Όπως πριν το σημείο συνάντησης είναι το $\vec{r}_\Sigma = \dfrac{d}{1-\lambda}\hat{x} = 3R\hat{x}$. Για να συναντήσει ο Α τον Β στον ελάχιστο χρόνο πρέπει να τρέξει με ταχύτητα μέτρου U, να διαγράψει τμήμα κύκλου ακτίνας R μέχρι το σημείο Α′ όπου η ταχύτητά του έχει φορά προς το Σ και να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το Σ.



Αν το τμήμα Α′Σ σχηματίζει οξεία γωνία θ με τον άξονα x τότε $\sin\theta = \dfrac{KA'}{K\Sigma} = \dfrac{KA'}{O\Sigma - OK} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$.
Όσο ο Α κινείται κυκλικά η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή $\omega = U/R$ και άρα η γωνία που διαγράφει ο Α είναι Ut/R. Αυτό συνεχίζεται όσο $\dfrac{Ut}{R} < \dfrac{\pi}{2} + \theta \Leftrightarrow t < t'$ όπου $t' = \dfrac{2\pi R}{3U}$. Στην κίνηση αυτή, όπως προκύπτει από το σχήμα, ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KA}}$ με συνιστώσες $x = R - R\cos\left(\dfrac{Ut}{R}\right)$ και $y = R\sin\left(\dfrac{Ut}{R}\right)$.

Παραγωγίζοντας προκύπτουν $v_x = \dot{x} = U\sin\left(\frac{Ut}{R}\right)$, $v_y = \dot{y} = U\cos\left(\frac{Ut}{R}\right)$, $a_x = \dot{v}_x = \frac{U^2}{R}\cos\left(\frac{Ut}{R}\right)$ και $a_y = \dot{v}_y = -\frac{U^2}{R}\sin\left(\frac{Ut}{R}\right)$.

Στην ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση $A'\Sigma$ που ισχύει για $t > t'$ η ταχύτητα του A είναι σταθερή και ίση με την τιμή που είχε στο A′, δηλ. $\vec{v}|_{t=t'} = U\sin\left(\frac{Ut'}{R}\right)\hat{x} + U\cos\left(\frac{Ut'}{R}\right)\hat{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}U\hat{x} - \frac{1}{2}U\hat{y}$. Η επιτάχυνση είναι μηδενική και η θέση είναι $\vec{r} = \vec{r}|_{t=t'} + \vec{v}|_{t=t'}(t-t') = \frac{3R+\sqrt{3}U(t-t')}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}R - U(t-t')}{2}\hat{y}$.

Τη στιγμή της συνάντησης είναι $y = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}\frac{R}{U}$. Στο σχήμα φαίνεται και η τροχιά του B, η οποία είναι σμίκρυνση – συγκεκριμένα όλες οι αποστάσεις είναι υποδιπλάσιες – αυτής του A.

(γ) Για τις περιπτώσεις με $R > d$ ο συνδυασμός τμήμα κύκλου – ευθεία δεν δίνει λύση. Τώρα ο A πρέπει πρώτα να απομακρυνθεί από το σημείο συνάντησης ώστε να μπορεί στη συνέχεια με τμήμα κύκλου να φτάσει σε αυτό. Η απομάκρυνση θα είναι ταχύτερη σε τμήμα κύκλου ακτίνας R με κέντρο στο σημείο $K'(-R, 0)$. Επομένως η τροχιά του A αποτελείται από δύο τμήματα. Ένα τόξο μήκους $R\theta$ στον κύκλο ακτίνας R με κέντρο το $K'(-R, 0)$ μέχρι το σημείο $A'(-R + R\cos\theta, R\sin\theta)$ και στην συνέχεια ένα τόξο στον κύκλο ακτίνας R με κέντρο το $K(x_K, y_K)$ μέχρι το σημείο συνάντησης $\Sigma(2d, 0)$. Στο σημείο μετάβασης από τον ένα στον άλλο κύκλο η ταχύτητα είναι συνεχής, επομένως το κέντρο K είναι στην προέκταση του $K'A'$, δηλ. το διάνυσμα $A'K$ είναι ίσο με το $K'A'$. Είναι λοιπόν $x_K - x_{A'} = x_{A'} - (-R) \Leftrightarrow x_K = -R + 2R\cos\theta$ και $y_K - y_{A'} = y_{A'} - 0 \Leftrightarrow y_K = 2R\sin\theta$.

Όταν ο A διαγράψει γωνία ϕ στον δεύτερο αυτό κύκλο η θέση του είναι $x = x_K + R\cos(\pi + \theta - \phi) = -R + 2R\cos\theta - R\cos(\phi - \theta)$, $y = y_K + R\sin(\pi + \theta - \phi) = 2R\sin\theta + R\sin(\phi - \theta)$.

Η γωνία θ θα βρεθεί από την απαίτηση ο δεύτερος κύκλος να περνά από το $\Sigma(2d, 0)$, δηλ. να υπάρχει ϕ τέτοιο ώστε $-R + 2R\cos\theta - R\cos(\phi - \theta) = 2d$ και $2R\sin\theta + R\sin(\phi - \theta) = 0$, ή ισοδύναμα $\cos(\phi - \theta) = 2\cos\theta - 1 - 2d/R$ και $\sin(\phi - \theta) = -2\sin\theta$. Οι δύο προηγούμενες σχέσεις μετασχηματίζονται στις ακόλουθες για την γωνία ϕ: $\cos\phi = \cos(\phi - \theta + \theta) = \cos(\phi - \theta)\cos\theta - \sin(\phi - \theta)\sin\theta = 2 - (1 + 2d/R)\cos\theta$ και $\sin\phi = \sin(\phi - \theta + \theta) = \sin(\phi - \theta)\cos\theta + \cos(\phi - \theta)\sin\theta = -(1 + 2d/R)\sin\theta$.

Επομένως η θ και η ϕ θα βρεθούν από τις σχέσεις $\cos\phi = 2-(1+2d/R)\cos\theta$ και $\sin\phi = -(1+2d/R)\sin\theta$.

Η ταυτότητα $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ δίνει $\cos\theta = \frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)}$ (είναι μικρότερο της μονάδας για $R > d$) και άρα έχουμε δύο λύσεις, τις $\theta = \arccos\frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)} \in (0, \pi/2)$ και $\theta = 2\pi - \arccos\frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)} \in (3\pi/2, 2\pi)$.

Για την πρώτη είναι $\sin\theta > 0$ άρα $\sin\phi = -(1 + 2d/R)\sin\theta < 0 \Rightarrow \phi \in (\pi, 2\pi)$ και $\cos(2\pi - \phi) = 2 - (1 + 2d/R)\cos\theta = \frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2} \Leftrightarrow \phi = 2\pi - \arccos\frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2}$.

Για την δεύτερη είναι $\sin\theta < 0$ άρα $\sin\phi = -(1 + 2d/R)\sin\theta > 0 \Rightarrow \phi \in (0, \pi)$ και $\cos\phi = 2 - (1 + 2d/R)\cos\theta = \frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2} \Leftrightarrow \phi = \arccos\frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2}$.

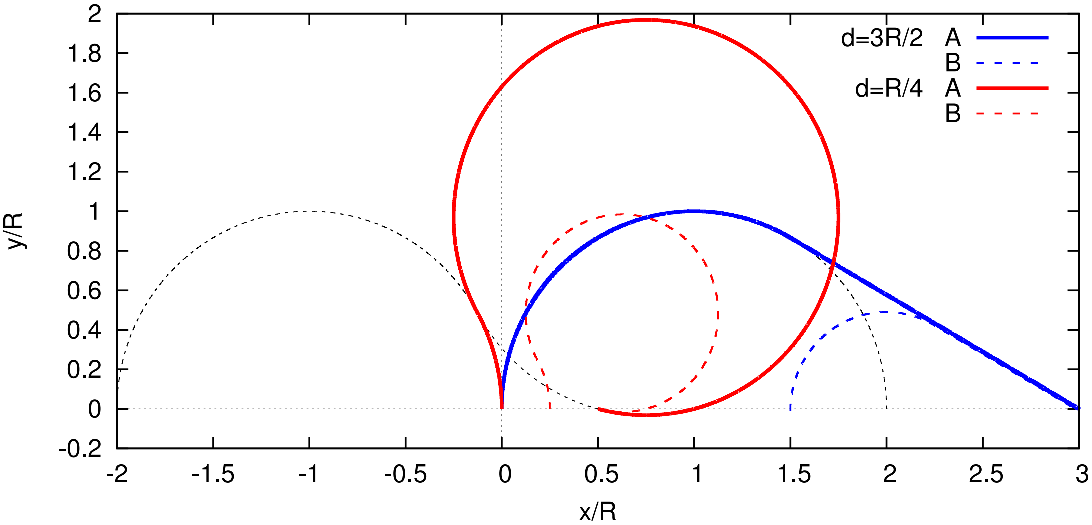
Σε κάθε μια από τις παραπάνω λύσεις ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι $t = \frac{R}{U}(\theta + \phi)$.

Στην πρώτη είναι $t = \frac{R}{U}\left(2\pi + \arccos\frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)} - \arccos\frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2}\right)$.

Στη δεύτερη είναι $t = \frac{R}{U}\left(2\pi - \arccos\frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)} + \arccos\frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2}\right)$.

Επειδή ισχύει $\frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)} > \frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2} \Leftrightarrow \arccos\frac{R^2 + Rd + d^2}{R(R + 2d)} < \arccos\frac{R^2 - Rd - d^2}{R^2}$ η συντομότερη διαδρομή είναι η πρώτη.

Συνοψίζοντας, για την συντομότερη τροχιά που θα ακολουθήσει ο A ισχύουν $\theta = \arccos\dfrac{R^2+Rd+d^2}{R(R+2d)}$, $\phi = 2\pi - \arccos\dfrac{R^2-Rd-d^2}{R^2}$, $t = \dfrac{R}{U}\left(2\pi + \arccos\dfrac{R^2+Rd+d^2}{R(R+2d)} - \arccos\dfrac{R^2-Rd-d^2}{R^2}\right)$.
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο περιπτώσεις, η περίπτωση με $d = 3R/2$ του ερωτήματος (β) και η περίπτωση με $d = R/4$ του ερωτήματος (γ).



---

3. Πρόκειται για την τροχιά του A του ερωτήματος (β) της προηγούμενης άσκησης. Η λύση έχει δοθεί στην απάντηση της άσκησης αυτής.

---

4. (α) $|\vec{a}_1| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $|\vec{a}_2| = \sqrt{(-3)^2+1^2+(\sqrt{90})^2} = 10$.
(β) Η προβολή του $\vec{a}_2$ πάνω στο $\vec{a}_1$ είναι $\left(\vec{a}_2 \cdot \dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}\right)\dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \left[\left(-3\hat{x}+\hat{y}+\sqrt{90}\hat{z}\right)\cdot\dfrac{3\hat{x}+4\hat{y}}{5}\right]\dfrac{3\hat{x}+4\hat{y}}{5} = \dfrac{-3\times 3+1\times 4+\sqrt{90}\times 0}{5}\;\dfrac{3\hat{x}+4\hat{y}}{5} = -\dfrac{3\hat{x}+4\hat{y}}{5}$.
(γ) $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = |\vec{a}_1|\;|\vec{a}_2|\;\cos(\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}) = \dfrac{3\times(-3)+4\times 1+0\times\sqrt{90}}{5\times 10} = -0.1 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}) = \arccos(-0.1)$.
Επειδή το συνημίτονο είναι μικρός αριθμός η γωνία είναι κοντά στην ορθή. Θέτοντας $(\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}) = \dfrac{\pi}{2}+\epsilon$ με $|\epsilon| \ll 1$ είναι $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\epsilon\right) = -0.1 \Leftrightarrow \sin\epsilon = 0.1$ και λόγω της προσέγγισης $\sin\epsilon \approx \epsilon$ προκύπτει $\epsilon \approx 0.1$.
Επομένως η γωνία σε ακτίνια είναι $(\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}) \approx \dfrac{\pi}{2}+0.1$.
(δ) Το εμβαδόν είναι το μέτρο του εξωτερικού τους γινομένου $\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & \sqrt{90} \end{vmatrix} = 4\sqrt{90}\hat{x} - 3\sqrt{90}\hat{y} + 15\hat{z}$, δηλ. $|\vec{a}_1\times\vec{a}_2| = \sqrt{16\times 90+9\times 90+225} = 15\sqrt{11}$.
(ε_1) Το $\hat{x}'$ είναι το μοναδιαίο στη διχοτόμο της γωνίας μεταξύ των $\hat{x}$ και $\hat{y}$, ενώ το $\hat{y}'$ είναι το μοναδιαίο στη διχοτόμο της γωνίας μεταξύ των $-\hat{x}$ και $\hat{y}$, δηλ. το σύστημα $Ox'y'$ είναι στραμμένο κατά $\pi/4$ ως προς το Oxy.
Γενικά αν η γωνία στροφής είναι φ τότε $\hat{x}' = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$, $\hat{y}' = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$. Στην περίπτωσή μας είναι προφανώς $\varphi = \pi/4$.
(ε_2) $\vec{a}_2 = (\vec{a}_2\cdot\hat{x}')\,\hat{x}' + (\vec{a}_2\cdot\hat{y}')\,\hat{y}' + (\vec{a}_2\cdot\hat{z}')\,\hat{z}' = -\sqrt{2}\hat{x}' + 2\sqrt{2}\hat{y}' + \sqrt{90}\hat{z}'$.
