Μηχανική Ι – Εργασία #7

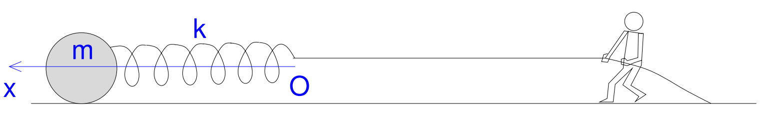
Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017 Ν. Βλαχάκης

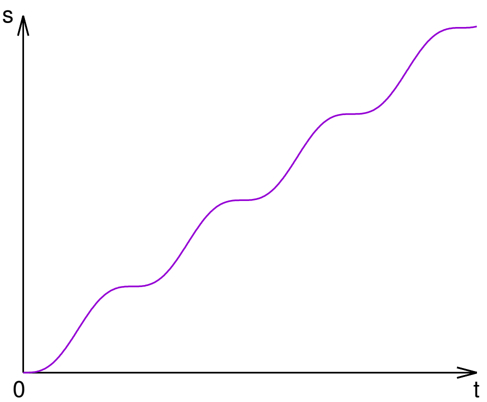
---

1. Σώμα μάζας m και φορτίου q είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους R, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο. Το σώμα έχει δυναμική ενέργεια $V_g = -mgx$ λόγω βαρυτικού πεδίου και $V_\epsilon = -q\epsilon_0 y \sin(\omega t)$ λόγω χρονοεξαρτώμενου οριζόντιου ηλεκτρικού πεδίου (g, ϵ_0 και ω είναι σταθερές). Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο στην κατώτερη θέση ($\phi = 0$).
(α) Μελετήστε την κίνηση σε πολικές συντεταγμένες και δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{\phi} + \dfrac{g}{R}\sin\phi = \dfrac{q\epsilon_0}{mR}\cos\phi \sin(\omega t)$.
Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης είναι ισοδύναμη με $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{\partial V_\epsilon}{\partial t}$, όπου $E = \dfrac{mv^2}{2} + V_g + V_\epsilon$ η ενέργεια.
(β) Έστω ότι $\omega = 3\omega_0$ όπου $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αρκούντως μικρό ώστε να ισχύει $|\phi(t)| \ll 1$.
Βρείτε την $\phi(t)$. Χρησιμοποιήστε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(3\xi) = 3\sin\xi - 4\sin^3\xi$ για να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα.
Ποια η περίοδος της κίνησης;
Ποια η μέγιστη τιμή της $\phi(t)$ και πόσο μικρό πρέπει να είναι το ηλεκτρικό πεδίο ώστε να ισχύει πράγματι $|\phi(t)| \ll 1$;
Πόση ενέργεια έχει δώσει το ηλεκτρικό πεδίο από $t = 0$ μέχρι κάποιο χρόνο t;

---

2. Άνθρωπος τραβά σώμα μάζας m μέσω ενός αβαρούς σχοινιού και ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = m\omega_0^2$, όπως στο σχήμα. Αρχικά (για $t = 0$) το σώμα είναι ακίνητο, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0 και το σχοινί είναι τεντωμένο.





Το μήκος του σχοινιού s που έχει τραβήξει ο άνθρωπος μετά από χρόνο t, το οποίο ισούται με το διάστημα μετακίνησης του σημείου O προς τα δεξιά, φαίνεται στο γράφημα και μοντελοποιείται με την έκφραση $\dot{s} = U\sin^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right) \Leftrightarrow s = \dfrac{Ut}{2} - \dfrac{U}{2\omega}\sin(\omega t)$, όπου ω και U σταθερές.
(α) Γράψτε την εξίσωση που καθορίζει τη θέση του σώματος στον άξονα Ox (τριβές δεν υπάρχουν).
(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.
(γ) Δείξτε ότι κάποια στιγμή το σχοινί θα χαλαρώσει. (Δεν ζητείται αυτή η στιγμή ούτε η κίνηση μετά την χαλάρωση).
(δ) Έστω στο σώμα ασκείται επιπλέον δύναμη κύλισης ανάλογη της ταχύτητας του σώματος ως προς το έδαφος. Γράψτε την εξίσωση κίνησης που δίνει τη θέση x του σώματος.

Λύσεις:

1. (α) Η δύναμη από τα πεδία είναι $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = mg\hat{x} + q\epsilon_0 \sin(\omega t)\hat{y}$. Νόμος Νεύτωνα στην $\hat{\phi}$ διεύθυνση: $mR\ddot{\phi} = \hat{\phi}\cdot\vec{F} = -mg\sin\phi + q\epsilon_0\sin(\omega t)\cos\phi \Leftrightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{R}\sin\phi = \frac{q\epsilon_0}{mR}\cos\phi\sin(\omega t)$.

Η ενέργεια είναι $E = \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} - mgR\cos\phi - q\epsilon_0 R\sin\phi\sin(\omega t)$, η ολική χρονική παράγωγός της $\frac{dE}{dt} = \left(mR^2\ddot{\phi} + mgR\sin\phi - q\epsilon_0 R\cos\phi\sin(\omega t)\right)\dot{\phi} + \frac{\partial V_\epsilon}{\partial t}$ με $\frac{\partial V_\epsilon}{\partial t} = -q\epsilon_0\omega R\sin\phi\cos(\omega t)$ και η $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V_\epsilon}{\partial t}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση κίνησης $mR^2\ddot{\phi} + mgR\sin\phi - q\epsilon_0 R\cos\phi\sin(\omega t) = 0$.
Γενικά η προβολή του νόμου Νεύτωνα πάνω στην ταχύτητα $m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V$ (η τάση νήματος είναι κάθετη στην ταχύτητα), χρησιμοποιώντας την $dV = d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V + \frac{\partial V}{\partial t}dt \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}V + \frac{\partial V}{\partial t}$, είναι ισοδύναμη με $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2} + V\right) = \frac{\partial V}{\partial t}$.

(β) Για μικρές γωνίες $\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1$ και η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = \frac{q\epsilon_0}{mR}\sin(3\omega_0 t)$ (εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση).
Λύση της ομογενούς: $\phi_{ομ} = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$. Μερική λύση της μορφής $\phi_{μερ} = A\sin(3\omega_0 t)$, με την αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση να δίνει $A = -\frac{q\epsilon_0}{8mR\omega_0^2} = -\frac{q\epsilon_0}{8mg}$.
Άρα η γενική λύση είναι $\phi = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) - \frac{q\epsilon_0}{8mg}\sin(3\omega_0 t)$ και έχει παράγωγο $\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = C_1\cos(\omega_0 t) - C_2\sin(\omega_0 t) - \frac{3q\epsilon_0}{8mg}\cos(3\omega_0 t)$. Από τις αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = 0$, $\dot{\phi}\big|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε $C_2 = 0$ και $C_1 = \frac{3q\epsilon_0}{8mg}$, οπότε η λύση είναι $\phi = \frac{q\epsilon_0}{8mg}\left[3\sin(\omega_0 t) - \sin(3\omega_0 t)\right]$.
Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin(3\omega_0 t) = 3\sin(\omega_0 t) - 4\sin^3(\omega_0 t)$ μπορούμε να γράψουμε $\phi = \frac{q\epsilon_0}{2mg}\sin^3(\omega_0 t)$. Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Η μέγιστη τιμή της γωνίας $\phi_{\max} = \frac{|q\epsilon_0|}{2mg}$. Για να είναι πάντα $|\phi| \ll 1$ πρέπει $|\epsilon_0| \ll \frac{2mg}{|q|}$.
Η ενέργεια που έχει δώσει το ηλεκτρικό πεδίο έχει γίνει κινητική και βαρυτική δυναμική, δηλ. $\mathcal{E} = \left(\frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi\right)_t - \left(\frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi\right)_{t=0} = \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} + mgR(1-\cos\phi)$. Με $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$ βρίσκουμε $\mathcal{E} = \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{mgR\phi^2}{2}$. Η αντικατάσταση δίνει $\mathcal{E} = \frac{q^2\epsilon_0^2 R}{8mg}\left[9 - 8\sin^2(\omega_0 t)\right]\sin^4(\omega_0 t)$.
Η ενέργεια θα μπορούσε να βρεθεί και μέσω της ισχύος της ηλεκτρικής δύναμης $\mathcal{E} = \int_0^t \vec{F}_\epsilon\cdot\vec{v}dt = \int_0^t q\epsilon_0\sin(3\omega_0 t)\cos\phi R\dot{\phi}dt$ με $\cos\phi \approx 1$ και $\dot{\phi} = \frac{3q\epsilon_0}{2mg}\sin^2(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$.

2. (α) Η απομάκρυνση του O από την αρχική του θέση O' είναι s προς τα δεξιά, ή διανυσματικά $\vec{r}_0 = -s\hat{x}$. Η ταχύτητα του O είναι $\vec{v}_0 = -\dot{s}\hat{x}$ και η επιτάχυνσή του είναι $\vec{a}_0 = -\ddot{s}\hat{x}$.
Η εξίσωση κίνησης του σώματος στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς Ox είναι $m\vec{a} = \vec{F}_{ελατ} - m\vec{a}_0 \Leftrightarrow m\ddot{x}\hat{x} = -k(x-\ell_0)\hat{x} + m\ddot{s}\hat{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\ell_0 + \ddot{s} = \omega_0^2\ell_0 + \frac{U\omega}{2}\sin(\omega t)$.

(β) Η λύση της ομογενούς είναι $C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$. Μια μερική λύση είναι $A + B\sin(\omega t)$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = \ell_0$ και $B = \dfrac{U\omega}{2(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης είναι $x = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) + \ell_0 + \dfrac{U\omega}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$.
Οι αρχικές συνθήκες $x = \ell_0$, $\dot{x} = 0$ (απόλυτη και σχετική ταχύτητα είναι ίσες αρχικά αφού $\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v} = -\dot{s}\hat{x} + \dot{x}\hat{x}$ και αρχικά $\dot{s} = 0$), δίνουν $C_1 = -\dfrac{U\omega^2}{2\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$, $C_2 = 0$, οπότε $x = \ell_0 + \dfrac{U\omega^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} - \dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \right]$.
Η λύση σε περίπτωση συντονισμού $\omega = \omega_0$ προκύπτει παίρνοντας το όριο της παραπάνω για $\omega \to \omega_0$.
(γ) Το σχοινί θα χαλαρώσει όταν η τάση μηδενιστεί. Η τάση είναι ίση με την δύναμη επιμήκυνσης του ελατηρίου (διότι στο άκρο O του ελατηρίου ασκούνται η τάση και η δύναμη ελατηρίου και πρέπει να έχουν μηδενική συνισταμένη αφού το O είναι αβαρές), άρα το σχοινί χαλαρώνει αν $x < \ell_0$. Αυτό συμβαίνει σίγουρα κάποια στιγμή αφού η συνάρτηση $x - \ell_0 = \dfrac{U\omega^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} - \dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \right]$ παίρνει αρνητικές τιμές. Ένας τρόπος να αποδειχθεί το τελευταίο είναι να γράψουμε την συνάρτηση σαν $x - \ell_0 = \dfrac{U\omega^2 f(t)}{2(\omega_>^2 - \omega_<^2)}$, όπου $f(t) = \dfrac{\sin(\omega_< t)}{\omega_<} - \dfrac{\sin(\omega_> t)}{\omega_>}$, $\omega_> = \max\{\omega, \omega_0\}$, $\omega_< = \min\{\omega, \omega_0\}$ και να δείξουμε ότι η $f(t)$ έχει αρνητικά ελάχιστα. Είναι $\dot{f} = \cos(\omega_< t) - \cos(\omega_> t)$, $\ddot{f} = -\omega_< \sin(\omega_< t) + \omega_> \sin(\omega_> t)$. Τα ακρότατα αντιστοιχούν σε στιγμές όπου $\dot{f} = 0 \Leftrightarrow \cos(\omega_> t) = \cos(\omega_< t) \Leftrightarrow \omega_> t = 2k\pi \mp \omega_< t \Leftrightarrow t_k = \dfrac{2k\pi}{\omega_> \pm \omega_<}$, με k ακέραιο. Στις στιγμές αυτές $\sin(\omega_> t) = \sin\left(\dfrac{2k\pi\omega_>}{\omega_> \pm \omega_<}\right) = \sin\left(2k\pi\dfrac{\omega_> \pm \omega_< \mp \omega_<}{\omega_> \pm \omega_<}\right) = \mp \sin\left(\dfrac{2k\pi\omega_<}{\omega_> \pm \omega_<}\right)$ και άρα είναι $f_k = \left(\dfrac{1}{\omega_<} \pm \dfrac{1}{\omega_>}\right) \sin\left(\dfrac{2k\pi\omega_<}{\omega_> \pm \omega_<}\right)$ και $\ddot{f}_k = \mp\omega_>\omega_< f_k$. Τα αρνητικά ελάχιστα – αν υπάρχουν – αντιστοιχούν στο πάνω πρόσημο (για να είναι η δεύτερη παράγωγος θετική). Επομένως, αν η f έχει αρνητικά ελάχιστα αυτά συμβαίνουν τις στιγμές $t_k = \dfrac{2k\pi}{\omega_> + \omega_<}$ και έχουν τιμές $f_k = \left(\dfrac{1}{\omega_<} + \dfrac{1}{\omega_>}\right) \sin\left(\dfrac{2k\pi\omega_<}{\omega_> + \omega_<}\right)$.
Αν $N = \left[\dfrac{\omega_>}{\omega_<}\right]$ (το ακέραιο μέρος του λόγου) τότε ισχύει $N \le \dfrac{\omega_>}{\omega_<} < N + 1 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{N+2} < \dfrac{2\pi\omega_<}{\omega_> + \omega_<} \le \dfrac{2\pi}{N+1}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η γωνία $\dfrac{2\pi N\omega_<}{\omega_> + \omega_<}$ βρίσκεται στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$, αφού $\pi \le \dfrac{2\pi N}{N+2} < \dfrac{2\pi N\omega_<}{\omega_> + \omega_<} \le \dfrac{2\pi N}{N+1} < 2\pi$ αν $N \ge 2$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα αρνητικό ελάχιστο, το f_N. Αν $N = 1$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι το f_2 είναι αρνητικό αφού $\dfrac{4\pi}{3} < \dfrac{4\pi\omega_<}{\omega_> + \omega_<} < 2\pi$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει αρνητικό ελάχιστο, άρα υπάρχει και κάποιος προγενέστερος χρόνος στον οποίο $f(t) = 0 \Leftrightarrow x = \ell_0$ και το νήμα χαλαρώνει.
(δ) Προσθέτοντας δύναμη $-m\lambda\vec{v}_a = -m\lambda(\dot{x}\hat{x} - \dot{s}\hat{x})$, αφού $\vec{v}_a = \vec{v}_\sigma + \vec{v}_0$, βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης $\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\ell_0 + \ddot{s} + \lambda\dot{s} = \omega_0^2\ell_0 + \dfrac{\lambda U}{2} + \dfrac{U\omega}{2}\sin(\omega t) - \dfrac{\lambda U}{2}\cos(\omega t)$.