Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017 Ν. Βλαχάκης

---

1. Αν αφήσουμε ένα σώμα από ύψος h πάνω από σημείο Ο της επιφάνειας της περιστρεφόμενης Γης σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος λ, το σώμα θα πέσει ανατολικότερα από το Ο.
(α) Κάποιος είχε την ακόλουθη ιδέα:
«Αν θέλουμε το σώμα να πέσει στην κατακόρυφη προβολή της αρχικής θέσης αρκεί να του δώσουμε μια μικρή αρχική ταχύτητα προς τη δύση. Διαλέγοντας κατάλληλη τιμή για αυτή την μικρή ταχύτητα μπορούμε ακριβώς να εξουδετερώσουμε την αρχική απόκλιση της τροχιάς προς την ανατολή και το σώμα να πέσει στο Ο.»
Συμφωνείτε με αυτή την πρόταση; Αν ναι βρείτε την μικρή αρχική ταχύτητα που χρειάζεται. Αν όχι, εξηγήστε που είναι το λάθος.
(β) Μια άλλη ιδέα:
«Μιας που η απόκλιση της τροχιάς οφείλεται στην δύναμη Coriolis η οποία καθώς το σώμα κατεβαίνει έχει φορά προς ανατολάς, αν το σώμα για κάποιο αρχικό χρονικό διάστημα ανεβαίνει η δύναμη Coriolis θα έχει φορά προς δυσμάς και ίσως αναιρέσει την απόκλιση προς ανατολάς που θα ακολουθήσει αναπόφευκτα στο κατέβασμα. Για να πέσει λοιπόν το σώμα στο Ο αρκεί να του δώσουμε κατάλληλη αρχική ταχύτητα προς τα πάνω.»
Ελέγξτε αν είναι εφικτό βρίσκοντας την κατάλληλη αρχική ταχύτητα.

---

2. Δαχτυλίδι είναι περασμένο σε ράβδο, η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από σημείο της Ο. Όλη η διάταξη βρίσκεται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και το δαχτυλίδι είναι ακίνητο στο Ο.
(α) Αν δεν υπάρχουν τριβές, βρείτε την εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού που καθορίζει την απόστασή του από το Ο σε κάθε χρόνο και επιλύστε την για τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες.
(β) Αν υπάρχει τριβή με συντελεστή $\tan\mu$ (ίδιος για στατική τριβή και για τριβή ολίσθησης) ποια στιγμή θα αρχίσει να κινείται το δαχτυλίδι; Ποια η εξίσωση κίνησής του μετά από αυτή τη στιγμή;

Λύσεις:

1. Η κίνηση κοντά στην επιφάνεια της Γης, λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφή της, περιγράφεται από $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται σε $\displaystyle\int_0^t \vec{a}\; dt = \vec{g}\int_0^t dt - 2\vec{\omega} \times \int_0^t \vec{v}\; dt$, ή,

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{g}t - 2\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)\,, \tag{1}$$

όπου $\vec{v}_0$ η αρχική ταχύτητα και $\vec{r}_0$ η αρχική θέση.
Αγνοώντας την περιστροφή παίρνουμε την μηδενικής τάξης λύση $\vec{v}^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, η οποία ολοκληρώνεται και δίνει

$$\vec{r}^{(0)} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2\,. \tag{2}$$

Η πρώτης τάξης διόρθωση στην ταχύτητα $\vec{v}^{(1)}$ είναι τάξης $\vec{\omega}$. Κρατώντας όρους μέχρι τάξης $\vec{\omega}$ η εξίσωση (1) δίνει $\vec{v}^{(0)}+\vec{v}^{(1)}-\vec{v}_0 = \vec{g}t-2\vec{\omega}\times(\vec{r}^{(0)}-\vec{r}_0) \Leftrightarrow \vec{v}^{(1)} = -2\vec{\omega}\times(\vec{r}^{(0)}-\vec{r}_0)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) έχουμε $\vec{v}^{(1)} = -2\vec{\omega} \times \left(\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2\right)$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει $\displaystyle\int_0^t \vec{v}^{(1)}\; dt = -2\vec{\omega} \times \int_0^t \left(\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2\right) dt \Leftrightarrow \vec{r}^{(1)} = -\vec{\omega} \times \vec{v}_0 t^2 - \frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}t^3$. Επομένως η θέση, κρατώντας μέχρι όρους ανάλογους του $\vec{\omega}$ είναι

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{\omega} \times \vec{v}_0 t^2 - \frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}t^3\,. \tag{3}$$

Σε ένα σύστημα αναφοράς με αρχή σε τόπο O με γεωγραφικό πλάτος λ, άξονα $\hat{z}$ προς το ζενίθ του τόπου, $\hat{x}$ προς νότο και $\hat{y}$ προς ανατολή, είναι $\vec{g} = -g\hat{z}$, $\vec{\omega} = \omega \sin\lambda\; \hat{z} - \omega\cos\lambda\; \hat{x}$ και οι συντεταγμένες της θέσης είναι

$$x = x_0 + v_{0x}t + v_{0y}\omega t^2 \sin\lambda\,, \tag{4}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - (v_{0z}\cos\lambda + v_{0x}\sin\lambda)\omega t^2 + \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda\,, \tag{5}$$

$$z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}\omega t^2\cos\lambda\,. \tag{6}$$

Παρόμοια εργαστήκαμε και στο μάθημα· δείτε και την 1η άσκηση από την 4η εργασία Μηχανικής Ι 2010-2011.

Αν αρχικά $\vec{r}_0 = h\hat{z}$ και $\vec{v}_0 = 0$ προκύπτει $x = 0$, $y = \frac{1}{3}\omega g t^3\cos\lambda$, $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Το σώμα φτάνει στο έδαφος σε χρόνο t_f όπου $z = 0 \Leftrightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Η απόκλιση προς ανατολή είναι $y = \frac{1}{3}\omega g t_f^3\cos\lambda = \sqrt{\frac{8\omega^2 h^3}{9g}}\cos\lambda$.

(α) Αν αρχικά $\vec{r}_0 = h\hat{z}$ και $\vec{v}_0 = v_{0y}\hat{y}$ προκύπτει $x = v_{0y}\omega t^2\sin\lambda$, $y = v_{0y}t + \frac{1}{3}\omega g t^3\cos\lambda$, $z = h - \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}\omega t^2\cos\lambda$. Μια αρχική ταχύτητα προς τη δύση $v_{0y} = -\frac{1}{3}\omega g t_f^2\cos\lambda = -\frac{2}{3}\omega h\cos\lambda$ μηδενίζει το y του τελικού σημείου. Αριθμητική τιμή $v_{0y} = -4.85\cos\lambda\frac{h}{100\text{ m}}$ mm/s.
Με την v_{0y} δημιουργείται βέβαια απόκλιση προς βορά $v_{0y}\omega t_f^2\sin\lambda$ η οποία όμως είναι τάξης

$\omega t_f = 3.3 \times 10^{-4}\sqrt{\dfrac{h}{100\text{m}}} \ll 1$ μικρότερη της αρχικής απόκλισης προς ανατολάς και άρα αμελητέα.

Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι το σώμα πέφτει σε χρόνο $t_f = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, ενώ τώρα είναι $z = h - \dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0y}\omega t^2\cos\lambda$ και ο χρόνος όπου $z=0$ είναι λίγο διαφορετικός. Προκύπτει όμως $t_f^{(0)} + t_f^{(1)}$ και η διαφορά στις αποκλίσεις προς ανατολή και βορρά που δημιουργεί η χρονική διαφορά $t_f^{(1)}$ είναι ανώτερης τάξης ως προς ω και άρα αμελητέα.

(β) Αν αρχικά $\vec{r}_0 = h\hat{z}$ και $\vec{v}_0 = v_{0z}\hat{z}$ προκύπτει $x = 0$, $y = -v_{0z}\omega t^2\cos\lambda + \dfrac{1}{3}\omega g t^3\cos\lambda$, $z = h + v_{0z}t - \dfrac{1}{2}gt^2$.

Αν t_f ο χρόνος πτώσης για τον οποίο $z = 0 \Leftrightarrow h + v_{0z}t_f - \dfrac{1}{2}gt_f^2 = 0$, η απαίτηση $y|_{t_f} = 0$ δίνει $v_{0z} = \dfrac{1}{3}gt_f$. Η επίλυση του συστήματος δίνει $t_f = \sqrt{\dfrac{6h}{g}}$ και $v_{0z} = \sqrt{\dfrac{2gh}{3}}$. Αριθμητική τιμή $v_{0z} = 92\left(\dfrac{h}{100\text{ m}}\right)^{1/2}$ km/h. (Το σώμα φτάνει μέχρι μέγιστο ύψος $\approx 4h/3$.)

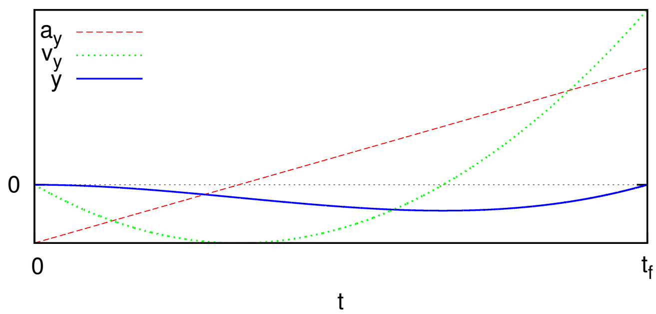
Κατά την παραπάνω κίνηση η επιτάχυνση στην $\hat{y}$ κατεύθυνση, λόγω της δύναμης Coriolis είναι $a_y = -2\omega v_z\cos\lambda = -2\omega(v_{0z} - gt)\cos\lambda$. Παρότι στο ανέβασμα και στο κατέβασμα η φορά της a_y είναι αντίθετη και το μέτρο ίδιο σε κάθε ύψος z, οπότε ο χρόνος που έχει φορά προς ανατολή είναι συνολικά μεγαλύτερος (αφού για $0 < z < h$ έχουμε μόνο κατέβασμα), μπορεί η συνολική μετατόπιση προς ανατολή να είναι μηδενική γιατί η απόκλιση προς δυσμάς προηγείται.

Αυτό φαίνεται γραφικά δίπλα.

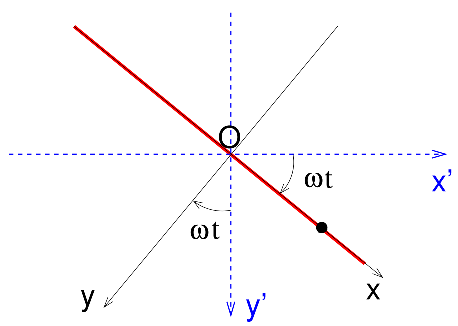
Είναι $a_y = 6\omega v_{0z}\cos\lambda\left(\dfrac{t}{t_f} - \dfrac{1}{3}\right)$,

$v_y = \omega t_f v_{0z}\cos\lambda\left[3\left(\dfrac{t}{t_f}\right)^2 - 2\dfrac{t}{t_f}\right]$,

$y = \omega t_f^2 v_{0z}\cos\lambda\left[\left(\dfrac{t}{t_f}\right)^3 - \left(\dfrac{t}{t_f}\right)^2\right]$.



2.



Αν x είναι ο αρχικά οριζόντιος άξονας της ράβδου με Ox το μέρος της που αρχίζει να κατεβαίνει και Oy αρχικά κατακόρυφος άξονας με φορά προς τα κάτω, στο περιστρεφόμενο Oxy ισχύει $m\vec{a} = \Sigma\vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ με $\vec{r} = x\hat{x}$, $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$, $\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$, όπου $m\vec{g} = mg\hat{y}' = mg\left[\cos(\omega t)\hat{y} + \sin(\omega t)\hat{x}\right]$ το βάρος, $\vec{N} = N\hat{y}$ η κάθετη αντίδραση και $\vec{T} = T\hat{x}$ η τριβή, $\vec{a}_0 = 0$ (το O είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$) και $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.

Η αντικατάσταση δίνει $m\ddot{x}\hat{x} = mg\cos(\omega t)\hat{y} + mg\sin(\omega t)\hat{x} + N\hat{y} + T\hat{x} + m\omega^2 x\hat{x} - 2m\omega\dot{x}\hat{y}$ με συνιστώσες $\ddot{x} = T/m + g\sin(\omega t) + \omega^2 x$ και $N/m = 2\omega\dot{x} - g\cos(\omega t)$.
Θα μπορούσαμε να εργαστούμε σε πολικές στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Ox'y'z'$. Αν το δαχτυλίδι βρίσκεται στα θετικά x είναι $\phi = \omega t$ και ο νόμος Νεύτωνα $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \Leftrightarrow m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + m\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi} = mg\hat{y}' + N\hat{\phi} + T\hat{\varpi}$, με $\hat{y}' = (\hat{y}'\cdot\hat{\varpi})\hat{\varpi} + (\hat{y}'\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \sin\phi\,\hat{\varpi} + \cos\phi\,\hat{\phi}$, δίνει τις συνιστώσες $\ddot{\varpi} - \omega^2\varpi = g\sin(\omega t) + T/m$ και $2\omega\dot{\varpi} = g\cos(\omega t) + N/m$, δηλ. ίδιες εξισώσεις με $\varpi \leftrightarrow x$, $\hat{\varpi} \leftrightarrow \hat{x}$, $\hat{\phi} \leftrightarrow \hat{y}$.
Όμοια αν το δαχτυλίδι βρίσκεται στα αρνητικά x οπότε $\phi = \pi + \omega t$ προκύπτουν ίδιες εξισώσεις με $\varpi \leftrightarrow -x$, $\hat{\varpi} \leftrightarrow -\hat{x}$, $\hat{\phi} \leftrightarrow -\hat{y}$ (είναι τώρα $\vec{N} + \vec{T} = N\hat{y} + T\hat{x} = -N\hat{\phi} - T\hat{\varpi}$ και ο νόμος Νεύτωνα δίνει τις συνιστώσες $\ddot{\varpi} - \omega^2\varpi = -g\sin(\omega t) - T/m$ και $2\omega\dot{\varpi} = -g\cos(\omega t) - N/m$).
(α) Χωρίς τριβές είναι $\ddot{x} - \omega^2 x = g\sin(\omega t)$, γραμμική, μη-ομογενής διαφορική εξίσωση. Η λύσεις της ομογενούς είναι της μορφής $e^{\lambda t}$ με την αντικατάσταση να δίνει $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\omega$, άρα $x_{\text{ομ}} = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$. Η μερική λύση είναι $A\sin(\omega t)$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = -\dfrac{g}{2\omega^2}$.
Άρα η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης είναι $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} - \dfrac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$ και η παράγωγός της $\dot{x} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t} - \dfrac{g}{2\omega}\cos(\omega t)$.
Αρχικά το δαχτυλίδι είναι ακίνητο στο O, δηλ. $\vec{r} = 0$ και $\vec{v}_a = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_0 + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Η τελευταία, αφού $\vec{v}_0 = 0$ (το O είναι ακίνητο) και $\vec{r} = 0$ δίνει ότι η ταχύτητα είναι αρχικά μηδενική και στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Οι αρχικές συνθήκες είναι λοιπόν $x = \dot{x} = 0$ και δίνουν $C_1 = \dfrac{g}{4\omega^2}$ και $C_2 = -\dfrac{g}{4\omega^2}$, επομένως η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x = \dfrac{g}{2\omega^2}\left[\dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right]$, ή $x = \dfrac{g}{2\omega^2}[\sinh(\omega t) - \sin(\omega t)]$.
(β) Όσο το δαχτυλίδι μένει ακίνητο στο $x = 0$ είναι $N/m = -g\cos(\omega t)$ και $T/m = -g\sin(\omega t)$. Η τριβή είναι στατική και πρέπει να ισχύει $|T| < \tan\mu|N| \Leftrightarrow |\tan(\omega t)| < \tan\mu$. Επομένως το δαχτυλίδι θα αρχίσει να κινείται τη στιγμή μ/ω.
Μετά από τη στιγμή αυτή η $\vec{T}$ είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $|T| = \tan\mu|N| = m\tan\mu|2\omega\dot{x} - g\cos(\omega t)|$ και φορά αντίθετη της ταχύτητας, δηλ. $T = -|T|\dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$. Άρα η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} = -\tan\mu\left|\dfrac{2\omega\dot{x} - g\cos(\omega t)}{\dot{x}}\right|\dot{x} + g\sin(\omega t) + \omega^2 x$.
Όταν το σώμα αρχίσει να κινείται θα ισχύουν για κάποιο χρονικό διάστημα οι $\dot{x} > 0$ και $2\omega\dot{x} < g\cos(\omega t)$, οπότε η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} - 2\omega\tan\mu\dot{x} - \omega^2 x = \dfrac{g}{\cos\mu}\sin(\omega t - \mu)$ με γενική λύση $x = C_1 e^{\frac{1+\sin\mu}{\cos\mu}(\omega t - \mu)} + C_2 e^{-\frac{1-\sin\mu}{\cos\mu}(\omega t - \mu)} - \dfrac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t - 2\mu)$. Από $x|_{t=\mu/\omega} = 0$, $\dot{x}|_{t=\mu/\omega} = 0$ είναι $C_1 = \dfrac{g}{4\omega^2}(1 - \sin\mu)$, $C_2 = -\dfrac{g}{4\omega^2}(1 + \sin\mu)$. Η θέση, όσο ισχύουν οι $\dot{x} > 0$ και $2\omega\dot{x} < g\cos(\omega t)$, γράφεται $x = \dfrac{g}{2\omega^2}\left\{[\sinh(\omega t'/\cos\mu) - \sin\mu\cosh(\omega t'/\cos\mu)]\,e^{\omega t'\tan\mu} - \sin(\omega t' - \mu)\right\}$, όπου $t' = t - \mu/\omega$.
