

Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017

Ν. Βλαχάκης

1. Έστω ιδανικό εκκρεμές, δηλ. σημειακό σώμα μάζας m δεμένο σε αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους R το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό, μέσα σε ομογενή βαρύτητα g .

(α) Φέρνουμε το νήμα τεντωμένο σε οριζόντια θέση και δίνουμε στη μάζα ταχύτητα v_i προς τα πάνω. Εξετάστε αν θα χαλαρώσει το νήμα. Αν ναι, ποια η ταχύτητα στο σημείο που χαλαρώνει και ποια η τροχιά της μάζας μέχρι να ξανατεντώσει το νήμα;

(β) Αν αντί για νήμα έχουμε αβαρή ράβδο, αρχικά φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και δίνουμε στη μάζα ταχύτητα v_i προς τα πάνω, περιγράψτε την κίνηση ανάλογα με την τιμή της v_i . Αν το σώμα μόλις που φτάνει στην ανώτερη θέση βρείτε τη θέση του σε κάθε χρόνο.

Δίνεται $1 + \cos(2u) = 2 \cos^2 u$ και $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}} + \text{σταθερά}$.

2. Φορτισμένο σώμα κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, η μορφή του οποίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $\vec{B} = -A'(\varpi)\hat{\phi}$, όπου A κάποια συνάρτηση της κυλινδρικής ακτίνας και $A' = dA/d\varpi$ η παράγωγός της.

(α) Δείξτε ότι οι $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$ δίνουν τα ολοκληρώματα $m\varpi^2\dot{\phi} = L = \text{σταθερά}$, $m\dot{z} + qA(\varpi) = p_z = \text{σταθερά}$, αντίστοιχα.

(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά γράψτε την $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα σαν $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη») και βρείτε την $V_{\text{eff}} = - \int f(\varpi) d\varpi$.

(γ) Γράψτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας για αυτή την κίνηση. Έχει σχέση με την κινητική ενέργεια του σώματος (η οποία διατηρείται αφού η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο);

(δ) Έστω το σώμα ξεκινά από το σημείο $\varpi_0\hat{x}$ με ταχύτητα $v_0\hat{x}$ με $v_0 > 0$ (οπότε αρχικά $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = v_0$, $\dot{\phi} = 0$, $\dot{z} = 0$) και η συνάρτηση A είναι $A = A_0 \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$, όπου A_0 σταθερά.

Με τη βοήθεια του γραφήματος της V_{eff} (βρείτε πρώτα τις σταθερές L και p_z) περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της v_0 .

Για «μικρές» τιμές της v_0 βρείτε τη θέση συναρτήσει του χρόνου.

(ε) Έστω το σώμα ξεκινά από το σημείο $\varpi_0\hat{y}$ με ταχύτητα $v_0\hat{y}$ (οπότε αρχικά $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = 0$, $\dot{\phi} = v_0/\varpi_0$, $\dot{z} = 0$) και η συνάρτηση A είναι $A = A_0 \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$, όπου A_0 σταθερά.

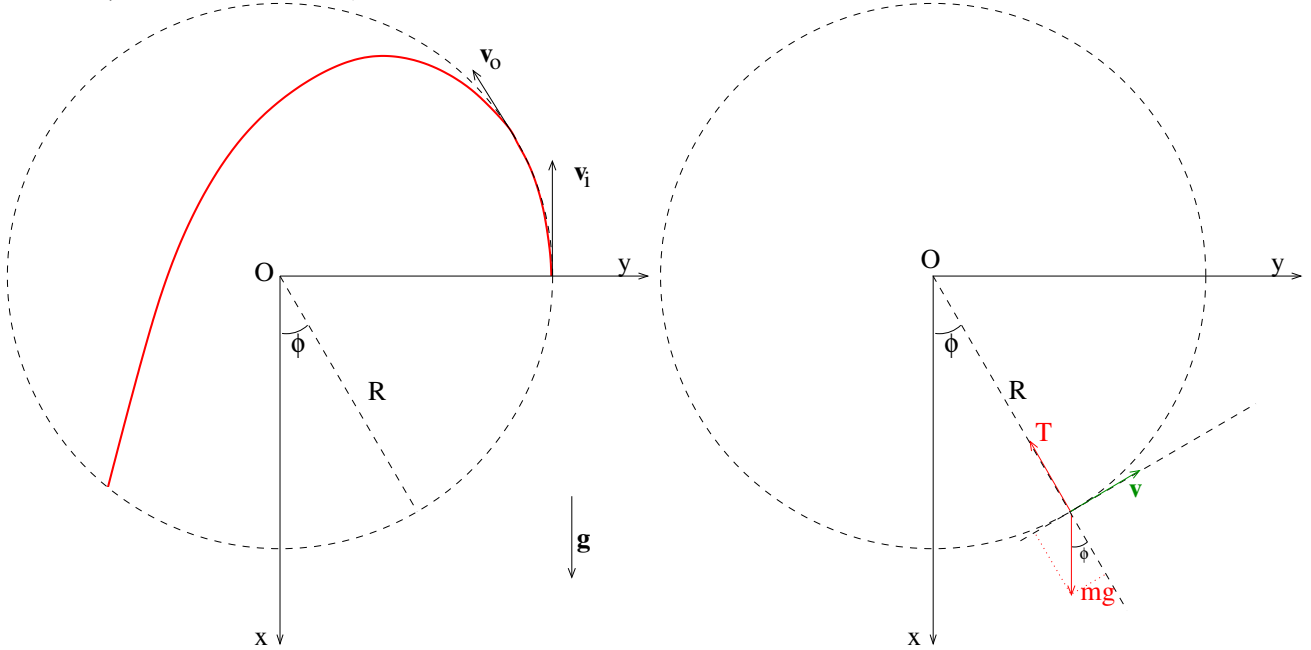
Με τη βοήθεια του γραφήματος της V_{eff} (βρείτε πρώτα τις σταθερές L και p_z) περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της v_0 .

Τι είδους κίνηση εκτελεί το σώμα για «μικρές» τιμές της $|v_0|$;

Δίνεται $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.

Λύσεις:

1. (α) Παρότι αρχικά το νήμα είναι οριζόντιο και η κίνηση προς τα πάνω μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση στο σύστημα αναφοράς του σχήματος, αυτό που χρησιμοποιήσαμε και στο μάθημα (απλά η γωνία όσο το σώμα κινείται κυκλικά είναι $\phi \geq \pi/2$).



Σε πολικές στο κατακόρυφο επίπεδο κίνησης είναι $\vec{r} = R\hat{\omega}$, $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\omega} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$, το βάρος είναι $m\vec{g} = mg\hat{x} = mg\cos\phi\hat{\omega} - mg\sin\phi\hat{\phi}$ και η τάση του νήματος $\vec{T} = -T\hat{\omega}$. Ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} \Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2\hat{\omega} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} = -T\hat{\omega} + mg\cos\phi\hat{\omega} - mg\sin\phi\hat{\phi}$ και οι συνιστώσες του δίνουν

$$T = mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi, \quad (1)$$

$$mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi. \quad (2)$$

Η σχέση (1) δίνει την τάση του νήματος. Η σχέση (2) είναι η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $\phi(t)$. Είναι ισοδύναμη με τη διατήρηση ενέργειας, η οποία ισχύει αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη με $V = -mgx = -mgR\cos\phi$ και η τάση του νήματος δεν παράγει έργο σαν κάθετη στην κίνηση (είναι τετριμμένη περίπτωση συντηρητικής δύναμης). Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{mv^2}{2} + V = E$ όπου η ενέργεια $E = \frac{mv_i^2}{2}$ βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες $\phi = \frac{\pi}{2}$, $v = v_i$, άρα

$$\frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} - mgR\cos\phi = \frac{mv_i^2}{2}. \quad (3)$$

Ένας ισοδύναμος τρόπος για να βρούμε την σχέση (3) είναι να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2):

Με $v = R\dot{\phi} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{v}{R}$ μπορούμε να γράψουμε $R\ddot{\phi} = \frac{dv}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\phi}$, οπότε η εξίσωση (2) γράφεται

$$m\frac{v}{R}\frac{dv}{d\phi} = -mg\sin\phi \Leftrightarrow \int_{v_i}^v mvdv = - \int_{\pi/2}^{\phi} mgR\sin\phi d\phi \Leftrightarrow \left[\frac{mv^2}{2}\right]_{v_i}^v = mgR[\cos\phi]_{\pi/2}^{\phi}.$$

Η εξίσωση (1), αντικαθιστώντας την $\dot{\phi}^2$ από την εξίσωση (3), δίνει την τάση σε κάθε θέση

$$T = \frac{mv_i^2}{R} + 3mg \cos \phi. \quad (4)$$

Οι εξισώσεις (3), (4) περιγράφουν πλήρως τη κίνηση όσο το νήμα είναι τεντωμένο. Όσο η γωνία αυξάνεται η τάση μειώνεται. Το νήμα χαλαρώνει στην γωνία ϕ_0 στην οποία

$$T = 0 \Leftrightarrow \cos \phi_0 = -\frac{v_i^2}{3gR} \Leftrightarrow \sin \left(\phi_0 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{v_i^2}{3gR} \Leftrightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v_i^2}{3gR}.$$

Θέση χαλάρωσης υπάρχει μόνο αν $v_i^2 < 3gR$.

(Αν $v_i^2 > 3gR$ το σώμα συνεχίζει να κινείται κυκλικά επ' άπειρον, χωρίς να αλλάζει φορά κίνησης. Αν $v_i^2 = 3gR$ η τάση μηδενίζεται στιγμιαία στην ανώτερη θέση $\phi_0 = \pi$, αλλά αμέσως μετά γίνεται πάλι θετική, οπότε το σώμα συνεχίζει να κινείται κυκλικά.)

Στο σημείο που το νήμα χαλαρώνει είναι $x_0 = R \cos \phi_0$ και $y_0 = R \sin \phi_0$, όπου $\cos \phi_0 = -\frac{v_i^2}{3gR}$,

$\sin \phi_0 = \sqrt{1 - \frac{v_i^4}{9g^2R^2}}$. Η σχέση (3) δίνει στο σημείο αυτό $\dot{\phi}_0 = \frac{v_i}{R\sqrt{3}}$, άρα η ταχύτητα έχει μέτρο

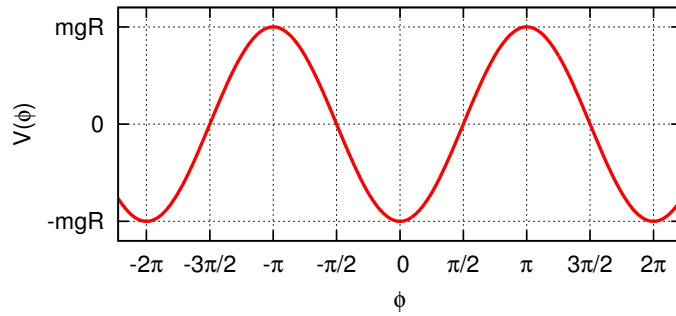
$v_0 = \frac{v_i}{\sqrt{3}}$ και φορά $\hat{\phi} = -\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y}$, δηλ. είναι $v_{0x} = -\frac{v_i}{\sqrt{3}} \sin \phi_0$ και $v_{0y} = \frac{v_i}{\sqrt{3}} \cos \phi_0$.

Μέχρι να ξανατεντώσει το νήμα είναι $T = 0$ και το σώμα εκτελεί πλάγια βολή. Ο νόμος Νεύτωνα $m\vec{a} = m\vec{g}$ δίνει $\ddot{x} = g$ και $\ddot{y} = 0$. Θεωρώντας $t = 0$ την στιγμή της χαλάρωσης του νήματος η πρώτη δίνει $\dot{x} = v_{0x} + gt \Leftrightarrow x = x_0 + v_{0x}t + \frac{gt^2}{2}$, ή $x = R \cos \phi_0 - v_0 t \sin \phi_0 + \frac{gt^2}{2}$ και η δεύτερη δίνει $\dot{y} = v_{0y} \Leftrightarrow y = y_0 + v_{0y}t$, ή $y = R \sin \phi_0 + v_0 t \cos \phi_0$. Απαλείφοντας τον χρόνο βρίσκουμε την παραβολική εξίσωση τροχιάς $x - x_0 = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}(y - y_0) + \frac{g}{2v_{0y}^2}(y - y_0)^2 \Leftrightarrow 2R \cos^2 \phi_0 (x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 - R) + (y - R \sin \phi_0)^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2Ry \sin^3 \phi_0 + 2Rx \cos^3 \phi_0 - 2R^2 \cos^2 \phi_0 + R^2 \sin^2 \phi_0 = 0$.

Όταν ξανατεντώσει το νήμα θα είναι $x = R \cos \phi_1$, $y = R \sin \phi_1$ οπότε θα ισχύει $\sin^2 \phi_1 - 2 \sin \phi_1 \sin^3 \phi_0 + 2 \cos \phi_1 \cos^3 \phi_0 - 2 \cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0 = 0$. Με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων η τελευταία γράφεται $-4 \sin^3 \frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \sin \frac{\phi_1 + 3\phi_0}{2} = 0$. Αφού $\phi_0 \in (\pi/2, \pi)$ και $\phi_1 \in (\pi, 5\pi/2)$ η μόνη λύση είναι η $\phi_1 = 4\pi - 3\phi_0$. Το νήμα λοιπόν ξανατεντώνει όταν το σώμα φτάσει στο σημείο $\frac{x_1}{R} = \cos(3\phi_0) = 4 \cos^3 \phi_0 - 3 \cos \phi_0 = \left(1 - \frac{4v_i^4}{27g^2R^2}\right) \frac{v_i^2}{gR}$, $\frac{y_1}{R} = -\sin(3\phi_0) =$

$$4 \sin^3 \phi_0 - 3 \sin \phi_0 = \left(1 - \frac{4v_i^4}{9g^2R^2}\right) \sqrt{1 - \frac{v_i^4}{9g^2R^2}}.$$

(β) Αν αντί για νήμα έχουμε αβαρή ράβδο δεν μας απασχολεί το πρόσημο της T και η κίνηση είναι πάντα κυκλική. Το ολοκλήρωμα ενέργειας (3) αρκεί (μέσω της μελέτης του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας) για να περιγράψουμε την κίνηση.



Αν $E > mgR \Leftrightarrow v_i > \sqrt{2gR}$ το σώμα εκτελεί πλήρεις κύκλους, ενώ αν $E < mgR \Leftrightarrow v_i < \sqrt{2gR}$ ταλαντώνεται μεταξύ των ακραίων θέσεων που αποτελούν λύσεις της $V(\phi) = E \Leftrightarrow \cos \phi = -\frac{v_i^2}{2gR} \Leftrightarrow \sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_i^2}{2gR}$, δηλ. μεταξύ των θέσεων $\phi = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v_i^2}{2gR}\right)$.

Αν $E = mgR \Leftrightarrow v_i = \sqrt{2gR}$ τότε το σώμα θα πλησιάζει επ' άπειρον το ανώτερο σημείο $\phi = \pi$ (στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη). Το ολοκλήρωμα ενέργειας (3) δίνει $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{R}}(1 + \cos \phi) = 2\sqrt{\frac{g}{R}} \cos \frac{\phi}{2}$ (είναι $\cos \frac{\phi}{2} > 0$ για $\pi/2 < \phi < \pi$). Επομένως $\int_{\pi/2}^{\phi} \frac{d\phi}{\cos \frac{\phi}{2}} =$

$$2\sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^t dt. \text{ Με } \phi = 2u \text{ προκύπτει } \int_{\pi/4}^{\phi/2} \frac{2 du}{\cos u} = 2\sqrt{\frac{g}{R}} t \Leftrightarrow \left[\ln \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} \right]_{\pi/4}^{\phi/2} = 2\sqrt{\frac{g}{R}} t \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \sin \frac{\phi}{2}}{1 - \sin \frac{\phi}{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} e^{2\sqrt{\frac{g}{R}} t} \Leftrightarrow \sin \frac{\phi}{2} = 1 - \frac{2e^{-2\sqrt{\frac{g}{R}} t}}{3 + 2\sqrt{2} + e^{-2\sqrt{\frac{g}{R}} t}}.$$

Σε κάθε χρόνο $\sin \frac{\phi}{2} < 1$ ενώ σε μεγάλους χρόνους, το οποίο πρακτικά σημαίνει $2\sqrt{\frac{g}{R}} t \gtrsim$

$5 \Leftrightarrow t \gtrsim \frac{5}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, προσεγγίζει την μονάδα και άρα το σώμα πρακτικά φτάνει στο ανώτερο σημείο

και μένει εκεί. Σε μεγάλους χρόνους είναι $\phi = \pi - \epsilon$ με $\sin \frac{\phi}{2} = \cos \frac{\epsilon}{2} \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{8}$, επομένως

$$\sin \frac{\phi}{2} = 1 - \frac{2e^{-2\sqrt{\frac{g}{R}} t}}{3 + 2\sqrt{2} + e^{-2\sqrt{\frac{g}{R}} t}} \Leftrightarrow \frac{\epsilon^2}{8} \approx \frac{2e^{-2\sqrt{\frac{g}{R}} t}}{3 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \epsilon \approx \frac{4e^{-\sqrt{\frac{g}{R}} t}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}, \text{ δηλ. } \phi \approx \pi - \frac{4e^{-\sqrt{\frac{g}{R}} t}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}.$$

2. Σε κυλινδρικές $\vec{r} = \varpi \hat{\omega} + z \hat{z}$, $\vec{v} = \dot{\varpi} \hat{\omega} + \varpi \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$, $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi \dot{\phi}^2) \hat{\omega} + \frac{1}{\varpi} \frac{d}{dt} (\varpi^2 \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}$, άρα

$$m(\ddot{\varpi} - \varpi \dot{\phi}^2) \hat{\omega} + m \frac{1}{\varpi} \frac{d}{dt} (\varpi^2 \dot{\phi}) \hat{\phi} + m \ddot{z} \hat{z} = q \begin{vmatrix} \hat{\omega} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \dot{\varpi} & \varpi \dot{\phi} & \dot{z} \\ 0 & -A' & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{\varpi} - \varpi \dot{\phi}^2) = qA'\dot{z} & \textcircled{1} \\ \frac{d}{dt} (m\varpi^2 \dot{\phi}) = 0 & \textcircled{2} \\ m\ddot{z} = -qA'\dot{\varpi} & \textcircled{3} \end{cases}$$

(α) Η $\textcircled{2}$ δίνει το ολοκλήρωμα της στροφορμής $m\varpi^2 \dot{\phi} = L = \text{σταθερά}$.

Η $\textcircled{3}$ ολοκληρώνεται επίσης διότι $A'\dot{\varpi} = \frac{dA}{d\varpi} \frac{d\varpi}{dt} = \frac{dA}{dt}$ και προκύπτει $m\dot{z} + qA = p_z = \text{σταθερά}$.

Αυτή είναι η $\hat{z}$ συνιστώσα της «κανονικής» ορμής $m\vec{v} + q\vec{A}$ που ορίζεται σαν το άθροισμα της κινητικής ορμής $m\vec{v}$ και της «δυναμικής» ορμής $q\vec{A}$ όπου $\vec{A}$ το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου, για το οποίο ισχύει $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Εδώ είναι $\vec{A} = A(\varpi)\hat{z}$ και $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -A'\hat{\phi}$.

(β) Αντικαθιστώντας στην ① τις σχέσεις $\dot{\phi} = \frac{L}{m\varpi^2}$ και $\dot{z} = \frac{p_z}{m} - \frac{qA}{m}$ βρίσκουμε $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$, δηλ. «μονοδιάστατη» κίνηση με «δύναμη» $f(\varpi) = \frac{L^2}{m\varpi^3} - \frac{qA'}{m}(qA - p_z)$.

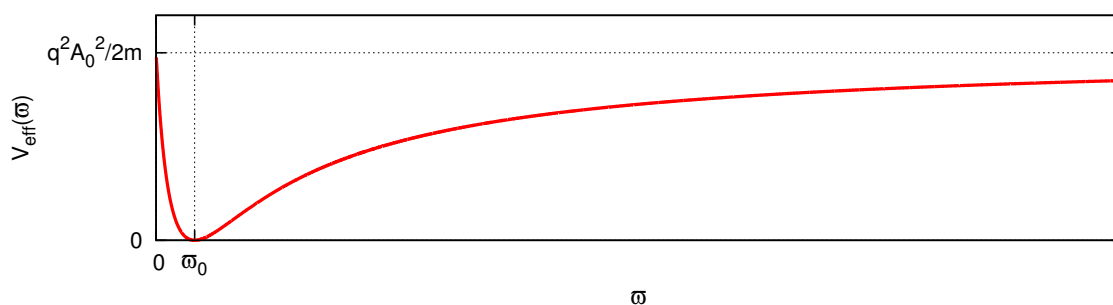
Η «δυναμική ενέργεια» είναι $V_{\text{eff}}(\varpi) = - \int f(\varpi) d\varpi = \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{(p_z - qA)^2}{2m} + \text{σταθερά}$.

(γ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\varpi) = \text{σταθερά}$, ή $\frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{(p_z - qA)^2}{2m} = E$. Το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζει την πραγματική ενέργεια του φορτίου, δηλ. την κινητική του ενέργεια (το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο και γι' αυτό δεν υπάρχει αντίστοιχη δυναμική ενέργεια), αφού $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{(p_z - qA)^2}{2m}$. Δηλαδή η «δυναμική ενέργεια» $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{(p_z - qA)^2}{2m}$ είναι το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών για τις κινήσεις στην ϕ και $\hat{z}$ κατεύθυνση.

(δ) Για τις αρχικές συνθήκες $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = v_0$, $\dot{\phi} = 0$, $\dot{z} = 0$ προκύπτουν $L = 0$, $p_z = 0$, $E = \frac{mv_0^2}{2}$, $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{q^2 A_0^2}{2m} \left(\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0} \right)^2$.

Η παράγωγος $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = \frac{2q^2 A_0^2 \varpi_0}{m} \frac{\varpi - \varpi_0}{(\varpi + \varpi_0)^3}$ είναι αρνητική για $\varpi < \varpi_0$ και θετική για $\varpi > \varpi_0$.

Επομένως η $V_{\text{eff}}(\varpi)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $0 \leq \varpi < \varpi_0$ όπου μειώνεται από $V_{\text{eff}}(0) = \frac{q^2 A_0^2}{2m}$ σε $V_{\text{eff}}(\varpi_0) = 0$, και αύξουσα στο διάστημα $\varpi_0 < \varpi < \infty$ όπου αυξάνεται από $V_{\text{eff}}(\varpi_0) = 0$ σε $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} V_{\text{eff}} = \frac{q^2 A_0^2}{2m}$. Το γράφημά της ακολουθεί.



- Αν $E > \frac{q^2 A_0^2}{2m} \Leftrightarrow v_0 > \frac{|qA_0|}{m}$ η κυλινδρική ακτίνα ϖ αυξάνει συνεχώς μέχρι το άπειρο. Όταν το σώμα φτάσει σε $\varpi \rightarrow \infty$ θα έχει ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi} = \sqrt{v_0^2 - \frac{q^2 A_0^2}{m^2}}$.

Η στροφορμή είναι μηδενική, οπότε η $\dot{\phi}$ είναι συνεχώς μηδενική και άρα η κίνηση γίνεται στο ημιεπίπεδο $\phi = 0$ (δηλ. στο μέρος του επιπέδου xz με θετικά $x = \varpi$).

Η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m} \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ οπότε το σώμα κινείται συνεχώς προς μικρότερα z αν $qA_0 > 0$ (προς μεγαλύτερα z αν $qA_0 < 0$) και ασυμπτωτικά έχει σταθερή ταχύτητα $\dot{z} = -qA_0/m$.

- Αν $E = \frac{q^2 A_0^2}{2m} \Leftrightarrow v_0 = \frac{|qA_0|}{m}$ η κίνηση είναι όμοια με πριν, με τη μόνη διαφορά ότι για $\varpi \rightarrow \infty$ η ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi}$ μηδενίζεται.

- Αν $0 < E < \frac{q^2 A_0^2}{2m} \Leftrightarrow 0 < v_0 < \frac{|qA_0|}{m}$ τότε η ακτινική κίνηση είναι ταλάντωση μεταξύ

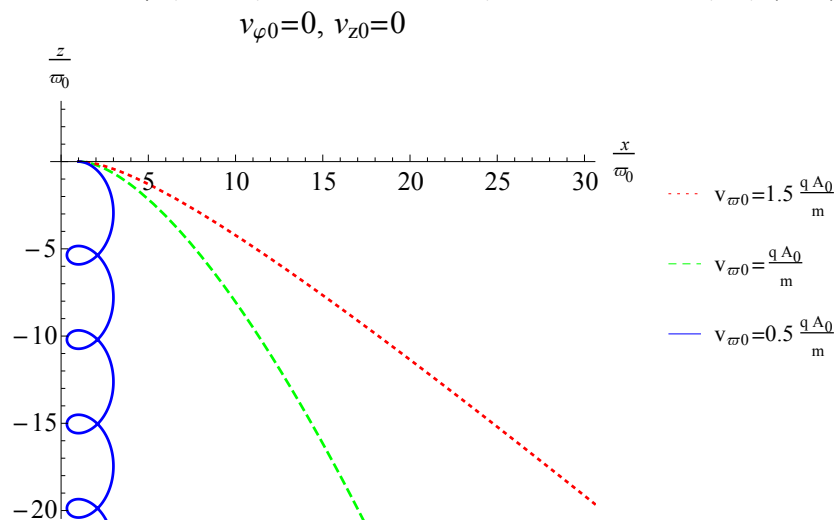
των ακτίνων στις οποίες $E = V_{\text{eff}}(\varpi) \Leftrightarrow \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0} = \pm \frac{mv_0}{qA_0} \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0 \frac{qA_0 \pm mv_0}{qA_0 \mp mv_0}$, δηλ.

$$\varpi_0 \frac{|qA_0| - mv_0}{|qA_0| + mv_0} \leq \varpi \leq \varpi_0 \frac{|qA_0| + mv_0}{|qA_0| - mv_0}.$$

Όπως και πριν η κίνηση γίνεται στο ημιεπίπεδο $\phi = 0$, ενώ η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m} \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ (η οποία τώρα δεν έχει σταθερό πρόσημο).

• Αν $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = 0$ το σώμα παραμένει ακίνητο στο αρχικό σημείο.

Παρακάτω φαίνονται οι διάφορες περιπτώσεις όπως προκύπτουν από αριθμητική ολοκλήρωση.



Για «μικρές» τιμές της v_0 το σώμα μένει στη γειτονιά του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας και είναι $\varpi = \varpi_0 + \epsilon$ με $|\epsilon| \ll \varpi_0$. Προσεγγιστικά η δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}} \approx \frac{m\omega^2\epsilon^2}{2}$ με

$\omega^2 = \frac{q^2 A_0^2}{4m^2 \varpi_0^2}$, το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{m\epsilon^2}{2} + \frac{m\omega^2\epsilon^2}{2} = \text{σταθερά}$ και η παράγωγός του δίνει εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{\epsilon} + \omega^2\epsilon = 0$ με γενική λύση $\epsilon = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, οπότε $\varpi = \varpi_0 + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, $\dot{\varpi} = \omega C_1 \cos(\omega t) - \omega C_2 \sin(\omega t)$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{v_0}{\omega}$, άρα $\epsilon = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ και η αρμονική ταλάντωση στην ακτινική κατεύθυνση

περιγράφεται από $\varpi = \varpi_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$, ή $\varpi = \varpi_0 + \frac{2m\varpi_0 v_0}{qA_0} \sin\left(\frac{qA_0}{2m\varpi_0} t\right)$.

Για την κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση ισχύει $\dot{z} \approx -\frac{qA_0}{2m\varpi_0} \epsilon = -\frac{qA_0 v_0}{2m\omega\varpi_0} \sin(\omega t)$ και ολοκληρώνοντας προκύπτει $z = -\frac{qA_0 v_0}{2m\varpi_0 \omega^2} [1 - \cos(\omega t)]$, ή $z = -\frac{2m\varpi_0 v_0}{qA_0} \left[1 - \cos\left(\frac{qA_0}{2m\varpi_0} t\right)\right]$.

Ο συνδυασμός των κινήσεων στις ϖ και z κατευθύνσεις είναι η αναμενόμενη ομαλή κυκλική κίνηση στο xz επίπεδο γύρω από το (τοπικά ομογενές) μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -A'\hat{\phi} \approx -\frac{A_0}{2\varpi_0}\hat{y}$, με ακτίνα $\frac{2m\varpi_0 v_0}{|qA_0|}$ και κέντρο το σημείο $x = \varpi_0$, $y = 0$, $z = -\frac{2m\varpi_0 v_0}{qA_0}$.

(ε) Για τις αρχικές συνθήκες $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = 0$, $\dot{\phi} = v_0/\varpi_0$, $\dot{z} = 0$ προκύπτουν $L = m\varpi_0 v_0$, $p_z = 0$, $E = \frac{mv_0^2}{2}$, $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{m\varpi_0^2 v_0^2}{2\varpi^2} + \frac{q^2 A_0^2}{2m} \left(\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2$.

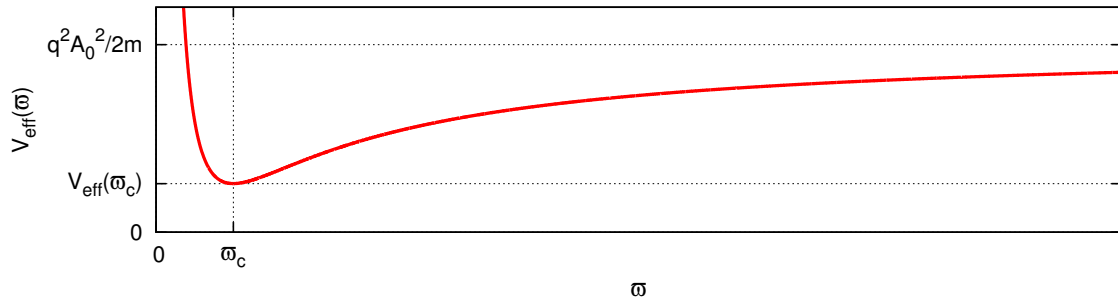
Η παράγωγος είναι $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = -\frac{m\varpi_0^2 v_0^2}{\varpi^3} + \frac{2q^2 A_0^2 \varpi_0}{m} \frac{\varpi - \varpi_0}{(\varpi + \varpi_0)^3}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$(\varpi + \varpi_0)^3 \frac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = -m\varpi_0^2 v_0^2 \left(1 + \frac{\varpi_0}{\varpi}\right)^3 + \frac{2q^2 A_0^2 \varpi_0}{m} (\varpi - \varpi_0)$ είναι γνησίως αύξουσα (και τα δύο μέρη της είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις της ακτίνας) και μεταβάλλεται από $-\infty$ στο $\varpi \rightarrow 0$ σε $+\infty$ στο $\varpi \rightarrow \infty$. Επομένως έχει ένα και μόνο ένα μηδενισμό σε κάποια ακτίνα ϖ_c , είναι αρνητική για $\varpi < \varpi_c$ και θετική για $\varpi > \varpi_c$. Συνεπώς η $V_{\text{eff}}(\varpi)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $0 < \varpi < \varpi_c$ όπου μειώνεται από $\lim_{\varpi \rightarrow 0} V_{\text{eff}} = +\infty$ σε $V_{\text{eff}}(\varpi_c)$, έχει ελάχιστο στην ακτίνα ϖ_c και

είναι αύξουσα στο διάστημα $\varpi_c < \varpi < \infty$ όπου αυξάνεται από $V_{\text{eff}}(\varpi_c)$ σε $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} V_{\text{eff}} = \frac{q^2 A_0^2}{2m}$.

Στην ακτίνα ϖ_c είναι $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = 0 \Leftrightarrow \frac{2q^2 A_0^2 \varpi_0}{m} \frac{\varpi_c - \varpi_0}{(\varpi_c + \varpi_0)^3} = \frac{m\varpi_0^2 v_0^2}{\varpi_c^3} > 0$, άρα η ακτίνα ϖ_c είναι μεγαλύτερη της αρχικής ακτίνας ϖ_0 .

Το γράφημα της δυναμικής ενέργειας ακολουθεί.



Στην αρχική ακτίνα είναι $\dot{\varpi} = 0$, επομένως είναι άκρο της ακτινικής κίνησης (ισχύει $V_{\text{eff}}(\varpi_0) = E$). Μάλιστα αφού $\varpi_0 < \varpi_c$ η ϖ_0 είναι η ελάχιστη ακτίνα.

Ανάλογα με την τιμή της ενέργειας η εξίσωση $V_{\text{eff}}(\varpi) = E$ έχει ή όχι δεύτερη λύση. Έτσι έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $E > \frac{q^2 A_0^2}{2m} \Leftrightarrow |v_0| > \frac{|qA_0|}{m}$ η κυλινδρική ακτίνα ϖ αυξάνει συνεχώς μέχρι το άπειρο. Όταν

το σώμα φτάσει σε $\varpi \rightarrow \infty$ θα έχει ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi} = \sqrt{v_0^2 - \frac{q^2 A_0^2}{m^2}}$.

Η κίνηση στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{\phi} = \frac{\varpi_0 v_0}{\varpi^2}$. Η αντίστοιχη ταχύτητα $\varpi \dot{\phi}$ είναι συνεχώς θετική και ασυμπτωτικά μηδενίζεται.

Η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m} \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ οπότε το σώμα κινείται συνεχώς προς μικρότερα z αν $qA_0 > 0$ (προς μεγαλύτερα z αν $qA_0 < 0$) και ασυμπτωτικά έχει σταθερή ταχύτητα $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m}$.

- Αν $E = \frac{q^2 A_0^2}{2m} \Leftrightarrow |v_0| = \frac{|qA_0|}{m}$ η κίνηση είναι όμοια με πριν, με τη μόνη διαφορά ότι για $\varpi \rightarrow \infty$ η ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi}$ μηδενίζεται.

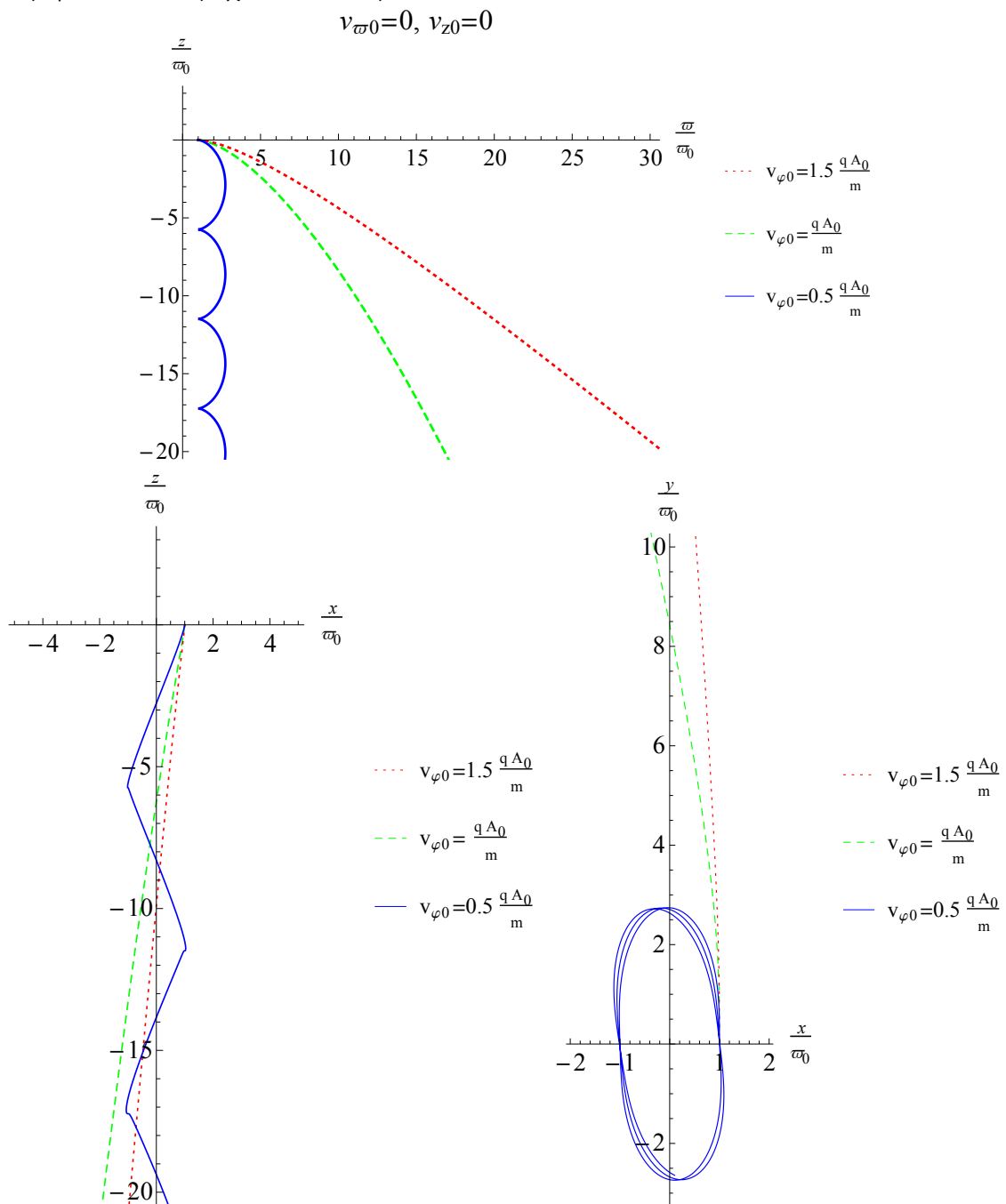
- Αν $V_{\text{eff}}(\varpi_c) < E < \frac{q^2 A_0^2}{2m} \Leftrightarrow 0 < |v_0| < \frac{|qA_0|}{m}$ τότε η ακτινική κίνηση είναι ταλάντωση μεταξύ των ακτίνων στις οποίες $E = V_{\text{eff}}(\varpi)$. Η ελάχιστη λύση είναι η αρχική ακτίνα ϖ_0 και η μέγιστη είναι η άλλη λύση ϖ_{max} της $\frac{m\varpi_0^2 v_0^2}{2\varpi^2} + \frac{q^2 A_0^2}{2m} \left(\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2} \Leftrightarrow \frac{q^2 A_0^2}{2m} \left(\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{\varpi^2 - \varpi_0^2}{\varpi^2}\right)$, δηλ. η λύση της $\frac{q^2 A_0^2}{m^2 v_0^2} \varpi_{\text{max}}^2 (\varpi_{\text{max}} - \varpi_0) = (\varpi_{\text{max}} + \varpi_0)^3$.

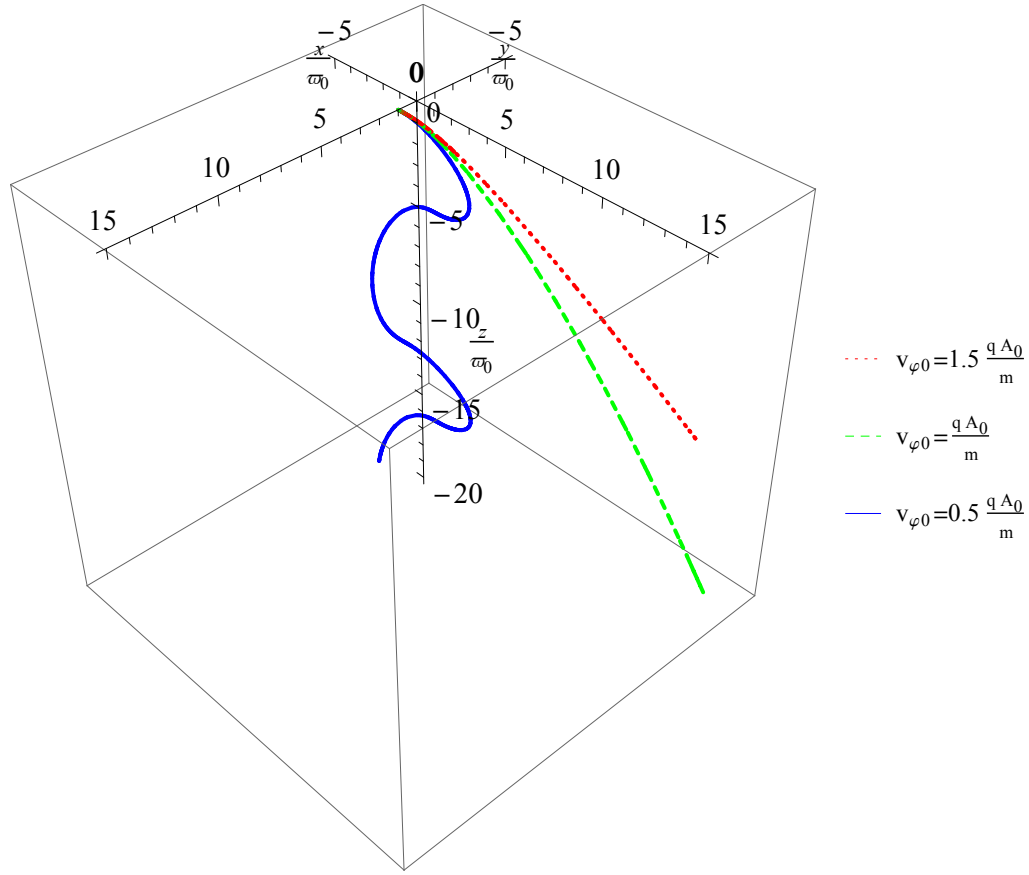
Η κίνηση στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{\phi} = \frac{\varpi_0 v_0}{\varpi^2}$. Η αντίστοιχη ταχύτητα $\varpi \dot{\phi}$ έχει σταθερό πρόσημο (το πρόσημο της v_0) παρότι αυξομειώνεται καθώς η ακτίνα αυξομειώνεται.

Η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m} \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ οπότε το σώμα κινείται συνεχώς προς μικρότερα z αν $qA_0 > 0$ (προς μεγαλύτερα z αν $qA_0 < 0$). (Μόνο τις στιγμές που η ακτίνα γίνεται ϖ_0 η στιγμιαία ταχύτητα $\dot{z}$ μηδενίζεται.)

• Αν $E = V_{\text{eff}}(\varpi_c) \Leftrightarrow v_0 = 0$ το σώμα παραμένει ακίνητο στο αρχικό σημείο. (Σε αυτή την περίπτωση $\varpi_c = \varpi_0$ και $V_{\text{eff}}(\varpi_c) = 0$.)

Παρακάτω φαίνονται οι διάφορες περιπτώσεις όπως προκύπτουν από αριθμητική ολοκλήρωση (διάφορες προβολές των τροχιών και οι τρισδιάστατες).





Για «μικρές» τιμές της $|v_0|$ το σώμα μένει στη γειτονιά του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας, το οποίο είναι κοντά στην αρχική θέση αφού $\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{d\omega} \right|_{\omega_c} = 0 \Leftrightarrow \frac{2q^2 A_0^2 \omega_0}{m} \frac{\omega_c - \omega_0}{(\omega_c + \omega_0)^3} = \frac{m\omega_0^2 v_0^2}{\omega_c^3} \ll 1$.

Θέτοντας $\omega_c - \omega_0 = D \ll \omega_0$ βρίσκουμε $\frac{2q^2 A_0^2 \omega_0}{m} \frac{D}{(2\omega_0)^3} = \frac{m\omega_0^2 v_0^2}{\omega_0^3} \Leftrightarrow D = \frac{4m^2 v_0^2 \omega_0}{q^2 A_0^2}$, οπότε $\omega_c \approx \omega_0 + \frac{4m^2 v_0^2 \omega_0}{q^2 A_0^2}$.

Για να περιγράψουμε τις ταλαντώσεις γύρω από το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, ή ισοδύναμα γύρω από την αρχική θέση, θέτουμε $\omega = \omega_0 + \epsilon$ με $|\epsilon| \ll \omega_0$ και αναπτύσσουμε ως προς ϵ αλλά και ως προς v_0^2 (είναι «ίδιας τάξης»). Έτσι προσεγγιστικά η δυναμική ενέργεια είναι

$$V_{\text{eff}}(\omega_0 + \epsilon) = \frac{m\omega_0^2 v_0^2}{2(\omega_0 + \epsilon)^2} + \frac{q^2 A_0^2}{2m} \left(\frac{\epsilon}{2\omega_0 + \epsilon} \right)^2 \approx \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{\omega_0} \epsilon + \frac{m\omega^2 \epsilon^2}{2} \text{ με } \omega^2 = \frac{q^2 A_0^2}{4m^2 \omega_0^2}, \text{ το}$$

ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{m\dot{\epsilon}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{\omega_0} \epsilon + \frac{m\omega^2 \epsilon^2}{2} = \text{σταθερά}$ και η παράγωγός του δίνει εξί-

σωση αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{\epsilon} + \omega^2 \epsilon = \frac{v_0^2}{\omega_0}$ με γενική λύση $\epsilon = \frac{v_0^2}{\omega^2 \omega_0} + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$,

οπότε $\omega = \omega_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2 \omega_0} + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, $\dot{\omega} = \omega C_1 \cos(\omega t) - \omega C_2 \sin(\omega t)$. Οι αρχικές

συνθήκες δίνουν $C_2 = -\frac{v_0^2}{\omega^2 \omega_0}$, $C_1 = 0$, άρα $\epsilon = \frac{v_0^2}{\omega^2 \omega_0} [1 - \cos(\omega t)]$ και η αρμονική ταλά-

ντωση στην ακτινική κατεύθυνση περιγράφεται από $\omega = \omega_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2 \omega_0} [1 - \cos(\omega t)]$, ή $\omega =$

$\varpi_0 + \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2} - \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2} \cos\left(\frac{qA_0}{2m\varpi_0}t\right)$. Μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα και σαν

$\varpi = \varpi_c - D \cos\left(\frac{qA_0}{2m\varpi_0}t\right)$, σχέση που δείχνει ότι η θέση ισορροπίας είναι η $\varpi_c = \varpi_0 + \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2}$

και το πλάτος της ταλάντωσης είναι $D = \varpi_c - \varpi_0$.

Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να αναπτύξουμε τη δυναμική ενέργεια γύρω από το σημείο του ελαχίστου, με $\varpi = \varpi_c + \epsilon_c$. Έτσι στο ανάπτυγμα $V_{\text{eff}}(\varpi_c + \epsilon_c) \approx V_{\text{eff}}|_{\varpi_c} + \frac{1}{2} \frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\varpi^2}\bigg|_{\varpi_c} \epsilon_c^2$ απουσιάζει

ο γραμμικός όρος, η εξίσωση κίνησης που προκύπτει από παραγωγή του ολοκληρώματος ενέργειας είναι ομογενής $\ddot{\epsilon}_c + \omega^2\epsilon_c = 0$ και η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $\epsilon_c = -D \cos(\omega t)$.

Η κίνηση στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{\phi} = \frac{\varpi_0 v_0}{\varpi^2} \approx \frac{v_0}{\varpi_0}$ οπότε η κυρίαρχη μεταβολή είναι γραμμική αύξηση με το χρόνο $\phi \approx \frac{v_0 t}{\varpi_0}$.

Για την κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση ισχύει $\dot{z} \approx -\frac{qA_0}{2m\varpi_0}\epsilon = -\frac{2mv_0^2}{qA_0} [1 - \cos(\omega t)]$ και ολοκληρώνοντας προκύπτει $z = -\frac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0} [\omega t - \sin(\omega t)]$.

Η κίνηση στο επίπεδο ϖz είναι κυκλοειδής.