

## Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017

Ν. Βλαχάκης

- 
1. Έστω πεδίο δύναμης  $\vec{F} = y^n \cos x \hat{x} + \sin x \hat{y}$  σε κατάλληλες μονάδες, με  $n$  θετικό ακέραιο.
- (α) Βρείτε για τις τιμές  $n = 1, 2, 3$  το έργο της  $\vec{F}$  για την κλειστή διαδρομή  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow O$  που αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των σημείων  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(\pi, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ .  
Υπόδειξη: Μια επιλογή παραμετροποίησης της διαδρομής  $O \rightarrow A$  είναι να θεωρήσουμε ανεξάρτητη την μεταβλητή  $x$ , οπότε  $y = \frac{x}{\pi}$ ,  $d\vec{r} = dx\hat{x} + \frac{dx}{\pi}\hat{y}$  και  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left( \frac{x^n}{\pi^n} \cos x + \frac{1}{\pi} \sin x \right) dx$ .
- Δίνεται  $\int_0^\pi x^n \cos x dx = -n\pi^{n-1} - n(n-1) \int_0^\pi x^{n-2} \cos x dx$  για  $n \geq 2$  και  $\int_0^\pi x \cos x dx = -2$ .
- (β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα βρείτε  $n$  για το οποίο ίσως η  $\vec{F}$  είναι συντηρητική. Για αυτή τη τιμή του  $n$  είναι πράγματι συντηρητική; Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας;
- 
2. Σώμα μάζας  $m = 1$  κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης  $F = -\frac{x}{1+x^4}$ .
- (α) Σχεδιάστε το γράφημα της  $F(x)$  και μέσω αυτού βρείτε αν υπάρχει σημείο ισορροπίας και αν αυτό είναι ευσταθές ή ασταθές. Αν υπάρχει και είναι ευσταθές, βρείτε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων γύρω από αυτό.
- (β) Βρείτε την δυναμική ενέργεια  $V(x)$ . Σχεδιάστε το γράφημά της και μέσω αυτού βρείτε αν υπάρχει σημείο ισορροπίας και αν αυτό είναι ευσταθές ή ασταθές.
- (γ) Έστω το σώμα έχει αρχική θέση  $x|_{t=0} = 0$ . Περιγράψτε την κίνησή του αν η αρχική του ταχύτητα είναι  $(\gamma_1) \dot{x}|_{t=0} = 0$ ,  $(\gamma_2) \dot{x}|_{t=0} = 1$ ,  $(\gamma_3) \dot{x}|_{t=0} = \sqrt{\pi/2}$ ,  $(\gamma_4) \dot{x}|_{t=0} = \sqrt{\pi}$ . Σε όποιες περιπτώσεις είναι περιοδική βρείτε τα άκρα της τροχιάς και το ολοκλήρωμα που δίνει την περίοδο.
- (δ) Σχεδιάστε στο φασικό χώρο τις τροχιές που αντιστοιχούν στις παραπάνω περιπτώσεις.
- Δίνεται  $\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan \xi + \text{σταθερά}$ .
-